ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Programme de colle n°10
Semaine du 9/12

Réduction des matrices carrées
Chaînes de Markov (en fin de semaine)

Ce qui tient lieu d'« exercice étoilé » pour la colle est la diagonalisation d'une matrice (diagonalisable !) :

- **Recherche de valeurs propres par pivot ou utilisation d'un polynôme annulateur ;**
- **Détermination de bases des sous-espaces propres ;**
- **Construction de** P **et** D **telles que** $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$**, en tenant compte d'éventuelles contraintes.**

Réduction des matrices carrées

Attention, en ECG2 Maths Appliquées on ne réduit que des matrices, et le chapitre est surtout à visée pratique. Pas de discussions « théoriques » de diagonalisabilité notamment.

Dans ce qui suit, $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Définitions : valeur propre, vecteur propre.
  Sous-espace propre : $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) = \{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}\}$.
  (NB : la notation est acceptée pour $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$, et on a alors la caractérisation : $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \Leftrightarrow \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) \neq \{0\}$.
- $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$ ssi $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ est non inversible (cas particulier très fréquent avec $\lambda = 0$).
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
  Extension : une concaténation de bases de sep associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
  Conséquence : $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda) \leqslant n$.
- Une matrice est diagonalisable ssi il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
- Polynômes de matrice ; polynôme annulateur. Si P est annulateur de M, Sp (M) est contenu dans l'ensemble des racines de P.
- Le spectre d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux (utilisable sans démonstration)
- Si M est symétrique, alors elle est diagonalisable (aucun autre résultat d'algèbre bilinéaire évidemment).

Réduction en pratique

- Recherche des éléments propres :
  - On discute l'inversibilité d'une matrice par le déterminant en dimension 2, ou un pivot de Gauss avec le paramètre λ en dimension $\geqslant 3$.
  - Utilisation d'un polynôme annulateur.
  - L'étude du rang de $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ et l'application du théorème du rang peut fournir une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
    NB : la version matricielle du théorème du rang est hors-programme. Il faut introduire l'endomorphisme canoniquement associé.
- Recherche des sous-espaces propres :
  - résolution de systèmes linéaires ;

    - dans certains cas, des arguments de dimension permettent de s'en sortir (ex : on connaît un vecteur propre associé à λ et on démontre que E_λ est de dimension 1).

- Si $\sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) = n$, construction de P et D telles que $M = PDP^{-1}$.
- Si $\sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) < n$, il n'est pas au programme de conclure que M n'est pas diagonalisable.
  Par contre on peut exiger le raisonnement par l'absurde qui montre que si $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda\}$ et $M \neq \lambda I_n$, alors M n'est pas diagonalisable.

Applications

- Calcul de A^n dans le cas diagonalisable.
- Si A n'est pas diagonalisable, on peut la trigonaliser (doit être guidé par l'énoncé) ; dans certains cas le calcul de A^n peut s'effectuer par formule du binôme.
- Étude de suites récurrentes.
- Résolution d'une équation matricielle en se ramenant à une forme diagonalisée.

Python

On importe le package `numpy.linalg` par :

```
import numpy.linalg as al
```

Voir le programme officiel d'ECG1 et 2 pour les commandes Python exigibles en calcul matriciel. Ici on se sert notamment de :

- `al.eig` : recherche d'éléments propres.
- `al.rank` : rang d'une matrice.
- `al.inv` : inverse d'une matrice inversible.
- `al.matrix_power` : mise à la puissance n d'une matrice.
- `np.dot` : produit matriciel.
- `np.eye` : matrice identité.
- `np.transpose` : transposition

Pour les colles de vendredi, on peut ajouter les chaînes de Markov :

- Rappels d'ECG1 sur les graphes : sommets, arêtes, graphes orientés, graphes pondérés.
- Matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non).
- Graphe probabiliste : c'est un graphe
    - orienté et pondéré ;
    - pour tous $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, on a au plus une arête $i \to j$;
    - pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, la somme des poids des arêtes sortant du sommet i est 1.

  On notera r le nombre de sommets du graphe probabiliste considéré.
- Matrice de transition d'un graphe probabiliste.
- Définition : matrice stochastique. Une matrice est stochastique ssi c'est la matrice de transition d'un graphe probabiliste. Si M est stochastique, $1 \in \mathrm{Sp}(M)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(M)$.

- Chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste de matrice de transition M : c'est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $[\![1,r]\!]$, telles que

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,r]\!]^2,\ \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)=m_{i,j}$$

  où $m_{i,j}$ est le coefficient (i,j) de M (c'est donc le poids de l'arête $i\to j$).
  Interprétation : position au temps n d'un système sans mémoire « se déplaçant aléatoirement » sur le graphe en temps discret.

- On range la loi de X_n dans un matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,r}$:

$$V_n=\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=1) & \dots & \mathbb{P}(X_n=r)\end{pmatrix}$$

  On a alors la relation $V_{n+1}=V_nM$. V_n est appelé *n-ième état probabiliste de la chaîne*.

- $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $V_n=V_0M^n$ (démo exigible en écrivant les probas totales et en faisant apparaître un produit matriciel).

- État probabiliste stable : c'est un état probabiliste $V=\begin{pmatrix}p_1 & \dots & p_r\end{pmatrix}$ (les p_i sont donc positifs et de somme 1) tel que $VM=V$.

  Un état $V=\begin{pmatrix}p_1 & \dots & p_r\end{pmatrix}$ est stable ssi $\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_r\end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$ pour la valeur propre 1.