ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Chaînes de Markov
Exercices

Exercice 1. On reprend l'exemple de cours où on effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce à Pile (proba $\frac{1}{3}$) ou Face (proba $\frac{2}{3}$) ; pour $n \geqslant 2$ on définit X_n la variable aléatoire égale à :

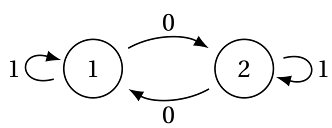
- 1 si les deux derniers lancers ont donné PP ;
- 2 si les deux derniers lancers ont donné PF ;
- 3 si les deux derniers lancers ont donné FP ;
- 4 si les deux derniers lancers ont donné FF.

On voit que $(X_n)_{n\geqslant 2}$ est une chaîne de Markov.

1. Rappeler son graphe et sa matrice de transition.
2. Déterminer l'état stable de cette chaîne.
3. Généraliser pour une pièce donnant Pile avec proba p et Face avec proba $q = 1 - p$.

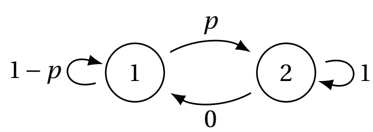
Exercice 2 (Chaînes à deux états)**.**

1. Cas 1 : deux états absorbants.



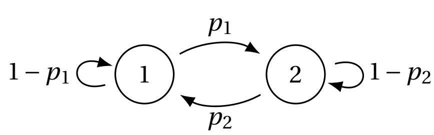
   Écrire la matrice de transition de cette chaîne. En déduire que la chaîne est presque sûrement constante.

2. Cas 2 : un seul état absorbant.



   (a) Construire la matrice de transition de cette chaîne et déterminer ses états stables.
   (b) Montrer que $(\mathbb{P}(X_n = 1))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1 - p$.
   En déduire qu'en partant d'un état initial quelconque, on converge toujours vers l'état stable.

3. Cas 3 : cas général.



(a) **Simulation informatique.**
Écrire une fonction Python `chaine(p1,p2,n)` qui simule le parcours aléatoire d'un système sur ce graphe, et renvoie sa position au temps `n`.
On supposera qu'au temps 0, le système se trouve dans l'état 1.

(b) Proposer une méthode permettant d'obtenir, à l'aide de cette fonction, une approximation de l'état probabiliste $\left(\mathbb{P}(X_n = 1) \quad \mathbb{P}(X_n = 2)\right)$ pour une valeur de n donnée.

(c) Construire la matrice de transition, notée A, de cette chaîne.

(d) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si : $\lambda^2-(2-(p_1+p_2))\lambda+(1-p_1)(1-p_2)-p_1p_2 = 0$.

(e) Déterminer alors le spectre de A. Montrer que l'état stable de la chaîne est $\pi = \left(\dfrac{p_2}{p_1+p_2} \quad \dfrac{p_1}{p_1+p_2}\right)$.

(f) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X_n = 1))$ est arithmético-géométrique.

(g) On considère qu'à l'origine, le système est dans l'état 1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'état probabiliste $\left(\mathbb{P}(X_n = 1) \quad \mathbb{P}(X_n = 2)\right)$. Y a-t-i convergence vers l'état stable ?

Exercice 3 (Une ébauche de PageRank)**.** On considère 4 pages Web reliées par les liens hypertexte suivants :

- La page P_1 contient un lien vers P_2, un lien vers P_3 et un lien vers P_4 ;
- La page P_2 contient un lien vers P_1 et un lien vers P_3.
- La page P_3 contient un lien vers P_4 ;
- La page P_4 contient un lien vers P_1 et un lien vers P_3.

Une personne surfe sur ce mini-Internet ; à chaque étape il clique au hasard, de manière équiprobable, sur un des liens de la page qu'il consulte.

1. Sa position au temps n est donc une chaîne de Markov ; donner son graphe et sa matrice de transition.
2. L'algorithme PageRank assigne alors à chaque page un score, donné par la distribution invariante de la chaîne de Markov. Quelle est la page obtenant le score le plus élevé ?
3. Ce modèle est imparfait... Comment créer, très simplement, une page Web obtenant un score très élevé ?

Exercice 4 (Problème du collectionneur)**.** On s'intéresse à un collectionneur de vignettes de paquets de céréales. Il y a 3 vignettes différentes. Dans chaque paquet il y a une vignette prise au hasard de manière équiprobable parmi les 3. À l'instant 0 le collectionneur n'a aucune vignette. À chaque instant n il achète un paquet ; s'il obtient une vignette qu'il n'a jamais eu, il la garde, sinon il la jette.
On note X_n le nombre de vignettes que possède le collectionneur après l'achat de n paquets de céréales (on considère que l'expérience se poursuit indéfiniment, même quand il a la collection complète).

1. Montrer que la suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ; donner son graphe et sa matrice de transition, notée M.
2. En notant $V_n = \left(\mathbb{P}(X_n = 0) \quad \mathbb{P}(X_n = 1) \quad \mathbb{P}(X_n = 2) \quad \mathbb{P}(X_n = 3)\right)$, redémontrer la formule de cours : $V_{n+1} = V_n M$.
3. Que vaut V_0 ?
4. Déterminer (sans calcul !) le spectre de M. Donner tous les états stables de la chaîne.
5. Diagonaliser ${}^tM$. En déduire la première ligne de M^n pour tout entier n (*ie* la première colonne de ${}^tM^n$; essayer de ne pas faire plus de calculs que nécessaire) ; puis la probabilité que le collectionneur ait une collection complète après n paquets achetés (mais pas forcément : complète sa collection exactement au temps n).
6. Pour tout $i \in [\![0,3]\!]$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = i)$. Cela vous parait-il raisonnable ?
NB : on dit que la suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi* vers une variable constante égale à 3.
7. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. On note T la variable aléatoire égale au temps où le collectionneur complète sa collection.

(a) Donner $T(\Omega)$.

(b) Soit $n \in T(\Omega)$. Écrire $(T = n)$ comme intersection d'un événement portant sur X_{n-1} et d'un événement portant sur X_n. En déduire $\mathbb{P}(T = n)$.

(c) Montrer que T admet une espérance, et la calculer.

Exercice 5. On considère deux urnes : la première contient 3 boules blanches, et la seconde trois boules noires. On répète indéfiniment l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans U_1, une boule dans U_2, et on les met dans l'autre urne (on fait donc un échange).
On note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne 1 à l'issue de n échanges.

1. Calculer $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = i)$, et $\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = i)$ pour $i \in [\![0,3]\!]$.

2. Montrer que si $|i - j| > 1$, $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = 0$.

3. Si $X_n = 1$, quel est le contenu des deux urnes ? En déduire $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$.

4. Finir de déterminer tous les $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ pour $(i, j) \in [\![0,3]\!]^2$.

5. Montrer que la suite (X_n) est une chaîne de Markov dont on donnera le graphe et la matrice de transition M.

6. On entre les commandes Python suivantes :

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

M1=np.array([[0,9,0,0],[1,4,4,0],[0,4,4,1],[0,0,9,0]])

al.eig(np.transpose(M1))
```

   et on obtient

```
(array([ 9.,   3.,  -3.,  -1.]),
array([[-0.07808688,   0.2236068  ,  -0.2236068  ,   0.5       ],
    [-0.70278193,   0.67082039,   0.67082039,  -0.5       ],
    [-0.70278193,  -0.67082039,  -0.67082039,  -0.5       ],
    [-0.07808688,  -0.2236068  ,   0.2236068  ,   0.5       ]]))
```

   Déduire de ces résultats le spectre de M.
   Où peut-on trouver le(s) état(s) stable(s) sur la sortie Python ci-dessus ?
   Justifier qu'il y aura en fait un unique état stable.

7. Montrer que $\operatorname{rg}(M - I_4) \geqslant 3$. En déduire que le sous-espace propre de ${}^tM$ pour la valeur propre 1 est de dimension 1.

8. Déterminer l'unique état stable de cette chaîne.

Exercice 6 (Sujet 0 EML 2022 : Étude d'une marche aléatoire)**.**
On considère trois points distincts du plan A, B et C. Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.
A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.

- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n » et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$,
- B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et $q_n = \mathbb{P}(B_n)$,
- C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n » et $r_n = \mathbb{P}(C_n)$,
- $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$ le n-ème état de cette chaîne de Markov.

Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (a) Déterminer p_0, q_0, r_0, ainsi que p_1, q_1, r_1.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n = V_0 M^n$.

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Calculer $A^2 - 5A$. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
   (c) Déterminer une matrice inversible P ainsi qu'une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On calculera la matrice P^{-1}.
   (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que : $M^n = \dfrac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite à la question 1.
   (b) Démontrer que $p_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2}{4^n}\right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n.
   (c) Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter ces résultats.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

   (a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Quelle est la signification de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n.

7. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.
   Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.
   (a) Calculer $\mathbb{P}([T_B = 1])$ et $\mathbb{P}([T_B = 2])$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\overline{B_n}$ à l'aide des événements A_n et C_n.
   (c) Démontrer que $\mathbb{P}\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)$. En déduire que $\mathbb{P}_{\overline{B_2}\cap\overline{B_1}}(B_3) = \dfrac{1}{4}$.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$ et on admettra que : $\mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([T_B = k])$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([T_B = 0])$.

(e) Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

Exercice 7. On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (a) La matrice M est-elle inversible ?

   (b) Montrer que M admet trois valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ que l'on précisera. Expliciter trois vecteurs U_1, U_2, U_3 tels que, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $E_{\lambda_i}(M) = \mathrm{Vect}(U_i)$.

   (c) Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (d) Déterminer les coordonnées (α, β, γ), dans la base (U_1, U_2, U_3), du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du i-ème tirage ».
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n-ème tirage et on pose $X_0 = 2$. On admet que (X_n) est une chaîne de Markov à 3 états (notés ici 0,1 et 2) et on note V_n son n-ème état probabiliste.
On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

2. (a) Représenter le graphe probabiliste auquel la chaîne (X_n) est associée et préciser la matrice de transition A de celui-ci. Exprimer A en fonction de M.

   (b) Justifier rigoureusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = V_n A$.

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$V_n = \alpha\, {}^tU_1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n {}^tU_2 + \gamma \left(\frac{1}{3}\right)^n {}^tU_3$$
   où α, β, γ sont les réels trouvés à la question (1d).

   (d) Donner la loi de la variable X_n. A-t-on convergence en loi de (X_n) ?

3. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, espérance de X_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Reconnaître la loi de T_1.

5. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 2])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 3])$.

6. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , on a :
   $$\mathbb{P}([T_2 = n]) = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

   (c) Monter que la variable aléatoire T_2 admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(T_2)$.

Indications

1

2 3. (f) On peut utiliser la matrice, ou faire une FPT et se souvenir que $\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) = 1$.

3 1.

2.

3. Penser à un état absorbant.

4 8. (b) Il complète sa collection *exactement* au temps n ssi il lui manque encore une carte au temps $n-1$, et qu'il obtient cette vignette au temps n.

5 1. Si $X_n = 0$ l'urne 1 ne contient que des noires ; et donc l'urne 2 ne contient que des blanches. L'échange effectué sera donc toujours le même ! Si $X_n = 3$ c'est similaire.

2. À l'issue d'un échange, une seule boule de chaque urne a été modifiée.

3. Si $X_n = 1$ on aura $X_{n+1} = 2$ si on enlève une boule noire de U_1 et qu'on y met à la place une boule blanche. Il faut donc regarder ce qu'on tire dans les 2 urnes.

4. Attention le nombre de boules blanches de U_1 peut ne pas être modifié à l'issue d'un échange. Dans quels cas ?

5. Il faut trouver $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Pour l'unicité regarder $\dim(E_1({}^tM))$.

6 1.

2. (a)

   (b) Redémontrer la formule de cours.

   (c) Faire la récurrence ; l'argument « suite géométrique » n'est pas accepté ici.

3. (a) La regarder dans les yeux.

   (b)

   (c)

   (d) Faire la récurrence.

4.

5. (a) On peut utiliser 3d... ou pas.

   (b)

   (c)

6. (a) Somme de 0 ou 1 : la situation est usuelle.

   (b)

   (c) Attention on ne connaît pas la loi de S_n !! Mais c'est pas grave.

7. (a) Dénombrer les chemins suivis par le pion pour que $[T_B = 1]$ (resp. $[T_B = 2]$) soit réalisé.

   (b)

   (c) Ici aussi dénombrer les chemins suivis et calculer les diverses probas. Vérifier qu'on a bien la formule demandée.

   (d) Question compliquée.
   $[T_B = k]$ s'exprime en fonction de B_k et D_{k-1}. Justifier ensuite que $D_{k-1} = [T_B \geqslant k]$ et obtenir une relation de récurrence sur $\mathbb{P}([T_B \geqslant k])$. À la fin on trouve une expression de type loi géométrique.. et on ne conclut pas trop vite !

   (e) On a bel et bien $T_B \hookrightarrow \mathscr{G}(\ldots)$.

7 1. (a)

   (b) Ne pas oublier le $\dfrac{1}{6}$!

   (c)

   (d)

2. (a) Regarder ${}^tA$.

   (b)

   (c) Équivaut à ${}^tV_n = \alpha U_1 + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n U_2 + \gamma\left(\frac{1}{3}\right)^n U_3$. Exprimer ${}^tV_n$ en fonction de ${}^tV_0$ et $({}^tA)^n$.

   (d)

3.

4. Pas besoin de chaîne de Markov pour cette question ! Mais on peut vérifier en exprimant $[T_1 = n]$ en fonction d'un événement portant sur X_{n-1} et d'un événement portant sur X_n.

5. Interpréter : on extrait la seconde blanche au bout de 2 tirages ssi il s'est passé quoi sur les 2 tirages ? L'autre est similaire mais l'événement associé un peu plus complexe. Ensuite évidemment les événements ne sont pas indépendants mais on va quand même s'en sortir.

6. (a) Si la seconde blanche sort au tirage n que dire de X_{n-1} et X_n ?

   (b)

   (c)