Réduction
Éléments de correction exos 5 et 6

Exercice 5

1. Avec $A = PD_1P^{-1}$ et $B = PD_2P^{-1}$ (où $D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$) on trouve $A - B = P(D_1 - D_2)P^{-1}$ puis $(A-B)^n = P(D_1 - D_2)^n P^{-1}$. Inverser P (ne pas oublier de vérifier ses calculs : en multipliant votre résultat par P, trouve-t-on bien I_3 ?) et finir le calcul.
   NB : on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (A-B)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

2. On considère les trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ définies par : $a_0 = 1, b_0 = 1, c_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n - c_n) \\ b_{n+1} = a_n + c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n - 2b_n + 4c_n) \end{cases}$$

   (a) $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}(A-B)U_n$.

   (b) Par récurrence : $U_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (A-B)^n U_0$. Comme on a diagonalisé $(A-B)^n$ on la met facilement à la puissance n ; on trouve

$$\frac{1}{3^n}(A-B)^n = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ 1 & 0 & 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & -\left(\frac{2}{3}\right)^n & 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

   (attention pas valable pour $n = 0$ car $0^0 = 1$) Avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on trouve U_n, et ses composantes sont a_n,b_n et c_n.

   (c) En regardant les expressions explicites de U_n si on prend $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on trouve des termes constants et des termes en $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ qui tendent vers 0. (a_n),(b_n) et (c_n) convergent toujours, et les limites sont nulles ssi $a + c = 0$

Exercice 6

1. $V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. On trouve $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -6-\lambda+4\lambda^2 \end{pmatrix}$.
   Si λ est racine du polynôme X^3-4X^2+X+6, alors $\lambda^3-4\lambda^2+\lambda+6=0$ ou encore $\lambda^3=4\lambda^2-\lambda-6$. Et donc

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

   $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ est non nulle (1er coeff =1) donc est un vep, pour la vap λ.

3. En factorisant par $X+1$: $X^3-4X^2+X+6=(X+1)(X^2-5X+6)$ et on trouve 3 racines : 1,2,3.
   Ces 3 racines sont vap de M d'après la question précédente ; $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc il n'y en a pas d'autres.
   De plus tous les sep sont de dimension 1 (se souvenir pourquoi) et un générateur est donné par la question 2 ; avec les contraintes données par l'énoncé l'unique couple (P, D) qui convient est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. $U_{n+1} = P^{-1}V_{n+1} = P^{-1}MV_n = P^{-1}(PDP^{-1})V_n = (P^{-1}P)D(P^{-1}V_n) = DU_n$. Par une récurrence immédiate (mais PAS en parlant de suite géométrique !!!)il s'ensuit $U_n = D^n U_0$.

5. $U_0 = P^{-1}V_0 = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la première colonne de P.
   Avec $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ on en déduit U_n ; puis $V_n = PU_n$; et u_n est la première composante de V_n.