ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Devoir maison n°4bis

Matrices stochastiques et chaînes de Markov

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} > 0$ (*ie* tous les coefficients de M sont strictement positifs).
- $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$ (toutes les lignes de M sont de somme 1).

On rappelle l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad ; \quad \text{et on a l'égalité ssi tous les } x_i \text{ sont de même signe.}$$

On rappelle aussi la formule du produit matriciel : si $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors la i-ème composante de la colonne MX vaut $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j$.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On définit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

   (a) Montrer : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j = \lambda x_i$.

   (b) Justifier que $|x_{i_0}| > 0$.

   (c) À l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que $\left|\sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} x_j\right| \leqslant |x_{i_0}|$ et en déduire $|\lambda| \leqslant 1$.

2. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes valent 1.
   Calculer MX. En déduire que 1 est valeur propre de M.

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, avec $|\lambda| = 1$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé, et $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

   Montrer :
   $$|x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} \left|x_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j}\right) \left|x_{i_0}\right| = |x_{i_0}|$$
   En déduire que tous les x_i sont de même signe.

4. Quitte à changer X en $-X$, on peut alors supposer que tous les x_i sont positifs. Montrer que $\lambda \geqslant 0$. Finalement, que vaut λ ?

On a donc montré que $\lambda = 1$ *est valeur propre de M, et que toute autre valeur propre de M est dans* $]-1,1[$.

On considère maintenant une matrice N à coefficients strictement positifs, telle que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{i=1}^{n} n_{i,j} = 1$$

(autrement dit, la somme de chaque colonne de N vaut 1).

5. Montrer que $M = {}^tN$ vérifie les hypothèses précédentes. En déduire que $\lambda = 1$ est valeur propre de N, et que toute autre valeur propre de N est dans $]-1, 1[$.

6. Soit X un vecteur propre de N associé à la valeur propre 1.
X étant non nul, il existe un $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_k \neq 0$. Quitte à changer X en $-X$ on peut supposer $x_k > 0$.
On suppose qu'il existe $\ell \neq k$ tel que $x_\ell < 0$.

   (a) Montrer :
$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ |x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} n_{i,j} x_j\right| < \sum_{j=1}^{n} n_{i,j} |x_j|$$
   (on utilisera l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité).

   (b) En sommant sur i cette dernière inégalité et en utilisant une interversion des signes somme, obtenir une absurdité.

   (c) Montrer que toutes les composantes de X sont strictement positives.

On examine maintenant la dimension de $E_1(N)$.

7. Soient U et V deux vecteurs propres associés à la valeur propre 1, de composantes respectives u_i et v_i. Montrer qu'il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $tu_1 - v_1 = 0$.

8. Montrer que $tU - V \in E_1(N)$, puis montrer que U et V sont colinéaires.

9. Montrer que $\dim(E_1(N)) = 1$.
En déduire qu'il existe un unique $E \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

   - $E_1(N) = \mathrm{Vect}(E)$
   - les composantes de E sont strictement positives, et leur somme vaut 1.

On considère enfin des suites de matrices colonnes. Soit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :

- $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.
- $\forall\, p \in \mathbb{N},\ X_{p+1} = NX_p$.

On a alors clairement : $\forall\, p \in \mathbb{N},\ X_p = N^p X_0$.

10. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ tels que $Y = NX$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

11. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme des composantes de X_p vaut 1.

12. On note $\mathrm{Sp}(N) = \{1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, avec, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $|\lambda_i| < 1$; et $(E, E_2, \ldots, E_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall\, i \geqslant 2,\ E_i \in E_{\lambda_i}(N)$ (E a été défini en question 9).
Soient $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les coordonnées de X_0 dans cette base. Montrer :
$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ X_p = \beta_1 E + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \lambda_i^p E_i$$
puis que $\lim_{p\to+\infty} X_p = \beta_1 E$.

13. Montrer que les composantes de $\beta_1 E$ sont de somme égale à 1 (on pourra utiliser la question 10).
En déduire
$$\lim_{p\to+\infty} X_p = E$$