DM 4 bis

Corrigé

1)a. On a $MX = \lambda X$; pour $i \in [\![1,n]\!]$, la i-ème composante de la colonne MX est $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$, et celle de λX est λx_i.

On a donc bien : $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j = \lambda x_i}$

1b. On a $|x_{i_0}| \geq 0$ assez clairement (tous les $|x_i|$ sont positifs donc leur max l'est aussi)

Si $|x_{i_0}| = 0$, tous les $|x_i|$ sont nuls (tous positifs, de valeur maximale 0) donc tous les x_i sont nuls, donc $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

C'est absurde car X est un vecteur propre de M.

d'où $\boxed{|x_{i_0}| > 0}$

1c.

Avec l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}| |x_j| = \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} |x_j|$$ (les m_{ij} sont positifs)

Mais $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|x_j| \leq |x_{i_0}|$; d'où :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j}\, x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j}\, |x_{i_0}| = |x_{i_0}| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j}}_{=1} = \underline{\underline{|x_{i_0}|}}$$

Or d'après 1a, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j}\, x_j = \lambda x_{i_0}$

d'où $|\lambda x_{i_0}| \leq |x_{i_0}|$

$\Rightarrow \quad |\lambda|\, |x_{i_0}| \leq |x_{i_0}| \quad \div\, \underline{\underline{|x_{i_0}| > 0}}$

$\Rightarrow \quad \boxed{|\lambda| \leq 1}$

2) Toujours avec la formule du produit matriciel :

si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 1$

alors $(MX)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$ par propriété de M

Ce qui donne $\underline{\underline{MX = X}}$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est donc un vecteur propre de M associé à 1

$\Rightarrow \quad \boxed{1 \in Sp(M)}$

3) Comme X est vecteur propre de M pour la vap λ, on a $MX = \lambda X$;

en regardant la composante d'indice i_0 il vient

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i_0 j}\, x_j = \lambda x_{i_0}$ d'où $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i_0 j}\, x_j\right| = \underbrace{|\lambda|}_{=1}|x_{i_0}| = |x_{i_0}|$

ce qui donne la première égalité.

La première inégalité est vue en 1c ; ainsi que les égalités et inégalités suivantes. ②

Les termes extrêmes de cet enchaînement sont égaux, ce qui montre que toutes les inégalités sont en fait des égalités

On a notamment : $\left|\sum_{j=1}^{n} m_{i_0 j}\, x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_{i_0 j}}_{\geq 0} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |m_{i_0 j}\, x_j|$

On est ainsi dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : tous les $m_{i_0 j} x_j$ sont donc de m̂ signe. Les m_{ij} étant ≥ 0 :

$$\boxed{\text{Tous les } x_j \text{ sont de même signe}}$$

4). Supposons donc tous les x_i positifs.

De $MX = \lambda X$, on tire, sur la composante i_0 :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i_0 j}\, x_j = \lambda x_{i_0} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{x_{i_0} > 0}} \qquad (\text{car } |x_{i_0}| = x_{i_0} > 0)$$

$$\text{et donc } \lambda = \frac{1}{\underbrace{x_{i_0}}_{>0}} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_{i_0 j}\, x_j}_{\geq 0} \quad \underline{\underline{\geq 0}}$$

$\lambda \geq 0$, et $|\lambda| = 1$: on a donc $\boxed{\lambda = 1}$

5) La somme des éléments de la i-ème ligne de M est égale à la ——— ——— — ——— colonne de N ; donc à 1.

Ceci valant pour tout i : $\boxed{\text{toutes les lignes de } M \text{ sont de somme } 1}$

De plus, $\forall i, j$: $m_{ij} = m_{ji} > 0$.

$\boxed{M \text{ vérifie donc les hypothèses des questions précédentes}}$

(*) On a donc : $1 \in Sp(M)$, et $\forall \lambda \in Sp(M)$ tq $\lambda \neq 1$, $\lambda \in]-1, 1[$.

Montrons que $Sp(M) = Sp(N)$

On écrit : $\lambda \in Sp(N) \Leftrightarrow \lambda \in Sp({}^tM)$

$\Leftrightarrow {}^tM - \lambda I_n$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow {}^t(M - \lambda I_n)$ ———

$\Leftrightarrow M - \lambda I_n$ ——— car A inv ssi ${}^tA$ inv

$\Leftrightarrow \lambda \in Sp(M)$.

ce qui permet bien de conclure $\boxed{Sp(M) = Sp({}^tM) = Sp(N)}$

$\boxed{\text{M et N ayant même spectre, les propriétés (*) obtenues sur } Sp(M) \text{ sont aussi vraies pour } Sp(N)}$

6. Comme $NX = X$, on a :

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij} x_j$, ce qui donne la première égalité en passant à la valeur absolue.

Les n_{ij} sont strict^t positifs. Si on a $x_k > 0$ et $x_\ell < 0$, $n_{ik} x_k$ et $n_{i\ell} x_\ell$ sont de signes opposés ; donc on n'est pas dans le cas d'égalité de l'inég. tri..

D'où : $\left| \sum_{j=1}^{n} n_{ij} x_j \right| < \sum_{j=1}^{n} |\underbrace{n_{ij}}_{>0} x_j| = \sum_{j=1}^{n} n_{ij} |x_j|$

b. On somme alors sur $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} n_{ij} |x_j| \right)}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} n_{ij} |x_j|$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \underbrace{\sum_{i=1}^{n} n_{ij}}_{=1} \right) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

On obtient : $\underline{\sum_{i=1}^{n} |x_i| < \sum_{j=1}^{n} |x_j|}$: $\boxed{\text{c'est absurde}}$

On en déduit donc : $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \ x_i \geq 0}$

c. On repart de :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad , \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, x_j$$

Tous les $m_{ij}\, x_j$ sont ≥ 0 ; et pour $j=k$, $\underbrace{m_{ik}}_{>0} \underbrace{x_k}_{>0} > 0$ par hypothèse

d'où $\quad x_i = \underbrace{m_{ik}\, x_k}_{>0} + \underbrace{\sum_{j \neq k} m_{ij}\, x_j}_{\geq 0} \; \underline{\underline{> 0}}$

$\boxed{\text{et toutes les composantes de } X \text{ sont donc strict}^t \text{ positives}}$

7) D'après la question 6, tous les u_i et v_i sont >0

Notamment, $u_1 > 0$ et $v_1 > 0$

Alors $\quad t u_1 - v_1 = 0 \iff t = \dfrac{v_1}{u_1}$ $\boxed{\text{et il y a donc bien un unique } t \in \mathbb{R} \text{ tq } t u_1 - v_1 = 0}$

8) $E_1(N)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$(U, V) \in (E_1(N))^2$ donc leur combinaison linéaire $tU - V$ est aussi ds $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Si $tU - V$ n'est pas nul, c'est 1 vecteur propre de N pour $\lambda = 1$, et donc,

quitte à prendre son opposé, toutes ses composantes sont >0 ; ce qui est absurde

car $t u_1 - v_1 = 0$!!

$\Rightarrow$ <u>$tU - V$ est donc nul</u> ; d'où $V = tU$ et $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont colinéaires}}$

Deux vecteurs propres quelconques de N pour $\lambda = 1$ sont colinéaires :

On a donc bien $\boxed{\dim(E_1(N)) = 1}$

On a donc l'existence de $E \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tq $E_1(N) = \text{Vect}(E)$, où E est défini à une constante multiplicative près

Supposons encore que E soit à composantes > 0 (sinon on prend $-E$...)

On cherche un α tq la somme des composantes de αE soit 1.

Si $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, $\alpha E = \begin{pmatrix} \alpha e_1 \\ \vdots \\ \alpha e_n \end{pmatrix}$ et donc on cherche α tq

$$\alpha e_1 + \dots + \alpha e_n = 1 \quad , \text{soit} \quad \alpha \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} e_i}_{>0 \text{ car les } e_i \text{ sont } >0} \Big) = 1$$

On trouve $\alpha = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} e_i}$, et le vecteur αE répond à la question.

Pour l'unicité : si $E_1(N) = \text{Vect}(E) = \text{Vect}(F)$ où E et F obéissent aux contraintes données : E et F sont colinéaires, de composantes soit toutes > 0, soit toutes < 0, et de somme des composantes $= 1$ (donc le cas < 0 est exclu)

En écrivant $F = \alpha E$, on obtient $\underbrace{\sum f_i}_{=1} = \alpha \Big(\underbrace{\sum e_i}_{=1} \Big)$ d'où $\alpha = 1$, et $\underline{\underline{E = F}}$

et on a bien unicité.

10. On sait que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$

$$\text{d'où } \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij} x_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij} \right)}_{=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

11. X_0 ayant la somme de ses composants égale à 1, on montre par récurrence immédiate : $\forall p \in \mathbb{N}$, $X_p = N^p X_0$ a aussi sa somme de composants égale à 1.

12. On a donc : $X_0 = \beta_1 E + \sum_{i=2}^{n} \beta_i E_i$

d'où : $\forall p \in \mathbb{N}$, $X_p = N^p X_0$

$= \beta_1 (N^p E) + \sum_{i=2}^{n} \beta_i (N^p E_i)$ en développant.

Or : si X est vep de M pour la vap λ, on a $MX = \lambda X$ et une récurrence immédiate donne $M^p X = \lambda^p X$

d'où : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ X_p = \beta_1 (1)^p E + \sum_{i=2}^{n} \beta_i (\lambda_i^p E_i)}$

$\forall i \in [\![2, n]\!]$, $|\lambda_i| < 1$ donc $\underline{\underline{\lim_{p \to +\infty} \lambda_i^p = 0}}$

et donc $\boxed{\lim_{p \to +\infty} X_p = \beta_1 E}$ (tous les termes de $\sum_{i=2}^{n}$ tendent vers 0)

13. $\forall p \in \mathbb{N}$, la somme des composants de X_p est égale à 1 ; propriété qui se conserve pour $p \to +\infty$:

$\boxed{\text{la somme des composants de } \lim_{p \to +\infty} X_p = \beta_1 E \text{ vaut } 1}$

... mais, avec $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$: $1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\beta_1 e_i}_{\substack{\text{composants} \\ \text{de } \beta_1 E}} = \beta_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} e_i}_{=1} = \beta_1$

$\Rightarrow \beta_1 = 1$ et $\boxed{\lim_{p \to +\infty} X_p = E}$