Exercice : Syst. différentiels (maison)

DS3

Partie I.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1a. On a $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

On observe $L_1 = L_2 = L_3 \neq (0 \quad 0 \quad 0)$; donc $rg(A + I_3) = 1$.

Ce rang étant < 3, $A + I_3$ n'est pas inversible, donc $\boxed{-1 \in Sp(A)}$

Si f est l'endo. de $\mathbb{R}^3$ canoniqu^t associé à A, on a :

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(f + Id)) + rg(f + Id)$

d'où $3 = \dim Ker(A + I_3) + rg(A + I_3)$

$\Rightarrow \boxed{\dim(Ker(A + I_3)) = 2}$

1b. On a $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc ces deux colonnes sont ds $E_{-1}(A)$

De plus, elles sont non colinéaires donc forment 1 famille libre de deux vecteurs de $E_{-1}(A)$. Comme $\dim(E_{-1}(A)) = 2$, on en déduit que c'est $\boxed{\text{une base de } E_{-1}(A)}$

1c. $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ par calcul direct.

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A pour la vap -2.

Comme $A \in M_3(\mathbb{R})$, $\sum_\lambda \dim(E_\lambda(A)) \leq 3$; donc $E_{-2}(A)$ est de dimension 1 (car E_{-1} est de dimension 2) et $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $E_{-2}(A)$.

$\dim E_{-1} + \dim E_{-2} = 3$: il n'y a pas d'autre vap.

$\Rightarrow \boxed{Sp(A) = \{-1, -2\}}$

1d. D'après ce qui précède P est obtenue en concaténant des bases des SEP de A ; donc P est inversible.

On a $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ car les deux 1° colonnes de P forment une base de E_{-1}, et la $3^{ème}$ une base de E_{-2}.

2a. Avec la base de vecteurs propres obtenue en 1°) et la formule de cours : les solut° de (S) sont les fonct°

$$t \mapsto K_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + K_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K_1+K_2)e^{-t} + K_3 e^{-2t} \\ (2K_1-K_2)e^{-t} + K_3 e^{-2t} \\ K_1 e^{-t} + K_3 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

où $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$

2b. Les états d'équilibre de (S) sont les éléments de $\ker(A)$

Or $0 \notin Sp(A)$; d'où $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est le seul état d'équilibre}}$

2c La forme des solut° de (2a) montrent que pour toute solut° de (S_1),

$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = 0$ (toutes les solut° convergent vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Ceci élimine les tracés 1 (convergence vers des limites non toutes nulles)

et 3 (divergence ! x, y, z semblent tendre vers $+\infty$)

le bon tracé est donc représenté sur la $\boxed{\text{Figure 2}}$.

3a. D'après le théorème de Cauchy, le problème de Cauchy

$\begin{cases} (S) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$ admet $\boxed{\text{une unique solution}}$, qui est celle qu'on recherche

3b. En reprenant la forme des solut° de 2a, on cherche la solution telle que

$$X(0) = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 + K_3 \\ 2K_1 - K_2 + K_3 \\ K_1 + K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On résout donc : $\begin{cases} K_1 + K_2 + K_3 = 1 \\ 2K_1 - K_2 + K_3 = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ K_1 + K_3 = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 + K_3 = 1 \\ -3K_2 - K_3 = -5 \\ -K_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K_1 = 1 - K_2 - K_3 = 1 - 2 + 1 = \underline{\underline{0}} \\ K_3 = 5 - 3K_2 = \underline{\underline{-1}} \\ \underline{\underline{K_2 = 2}} \end{cases}$$

et on obtient la solut° $\boxed{X : t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}}$

Partie II

4. a. y est solut° de (E) ssi :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = -2t\, y(t) + e^{-t^2}$$

~~avec $y(t) = e$~~

Calculons alors z' :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = 2t\, e^{t^2} y(t) + e^{t^2} y'(t)$$

$$= 2t\, e^{t^2} y(t) + e^{t^2}\left(-2t\, y(t) + e^{-t^2}\right) \quad \text{(d'après (E))}$$

$$\underline{\underline{z'(t) = 1}}.$$

4b. $\forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = 1$

donc $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = t + K$.

Ceci donne alors : $\underline{\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{-t^2} z(t) = (t+K)e^{-t^2}}$. $\circledast$

Si y est solut° elle est donc de la forme $\circledast$.

Réciproquement, toute fonct° de ce type est-elle solut° ?

Soit $K \in \mathbb{R}$ et $y : t \mapsto (t+K)e^{-t^2}$

On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = e^{-t^2} + (t+K)(-2t)e^{-t^2}$

$$= \underbrace{-2t(t+K)e^{-t^2}} + e^{-t^2}$$

$$y'(t) = -2t\,y(t) + e^{-t^2}$$ et y est bien solut° de (E).

$\boxed{\text{Ainsi les solut° de } (E) \text{ sont } \underline{\text{exactement}} \text{ les fonct° de la forme } t \mapsto (t+K)e^{-t^2},\ \text{où } K \in \mathbb{R}}$

5. On peut calculer P^{-1} et procéder brutalement ; ou vérifier que les colonnes de P sont des vep de $M(t)$ pour les valeurs propres présentes sur la diagonale

$*$ $M(t) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2t & -2+4t & +3-6t \\ -1+2t & -4+4t & +3-6t \\ -1+2t & -2+4t & +2-6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{(-1)}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$* \ M(t) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2t+1-2t \\ -1+2t+2-2t \\ -1+2t+1-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{(-1)}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$* \ M(t) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2t-1+2t+3-6t \\ -1+2t-2+2t+3-6t \\ -1+2t-1+2t+2-6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -2t \\ -2t \end{pmatrix} = \underline{\underline{(-2t)}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui permet de conclure à la formule demandée.

6. (S_2) s'écrit $X' = M(t)X + e^{-t^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $(S_2) \Leftrightarrow X' = PD(t)P^{-1}X + e^{-t^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow P^{-1}X' = D(t)P^{-1}X + e^{-t^2}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

multiplicat° par P^{-1} $\underline{\underline{\text{inversible}}}$ $\Leftrightarrow Y' = D(t)Y + e^{-t^2}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cette fois il faut calculer P^{-1}...

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = a \\ 2x-y+z = b \\ x \quad +z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = a \\ -3y-z = b-2a \\ -y = c-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a-y-z = \cancel{a}-\cancel{a}+c+a+b-3c = \underline{\underline{a+b-2c}} \\ z = -3y+2a-b = 3c-3a+2a-b = \underline{\underline{-a-b+3c}} \\ y = \underline{\underline{a-c}} \end{cases}$$

d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

et $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où en reprenant : $\boxed{(S_2) \iff Y' = D(t)Y + e^{-t^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

en explicitant les composantes :

$$\boxed{(S_2) \iff \begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -y_2 \\ y_3' = -2t\, y_3 + e^{-t^2} \end{cases}}$$

7. D'après le cours et la quest° 4 on a l'existence de 3 constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tq

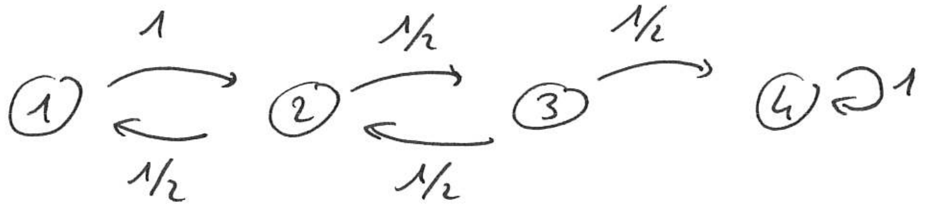
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_1(t) &= \alpha_1 e^{-t} \\ y_2(t) &= \alpha_2 e^{-t} \\ y_3(t) &= (\alpha_3 + t) e^{-t^2} \end{aligned}}$$

d'où $Y : t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-t} \\ \alpha_2 e^{-t} \\ (\alpha_3 + t) e^{-t^2} \end{pmatrix}$; puis $X : t \mapsto PY(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{(\alpha_1+\alpha_2)e^{-t} + (\alpha_3+t)e^{-t^2}}^{x(t)} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

Problème : Etude d'un parcours. (DS3)
d'après EDHEC 96 S

1) La posit° au temps $n+1$ du mobile n'étant conditionnée que par sa posit° au temps n, on a bien une chaîne de Markov.

D'après les règles de déplacement exposées, on peut tracer :



Le coefficient (i,j) de la matrice de transit° est le poids de la flèche $i \longrightarrow j$ (ou 0 si cette flèche est absente)

On en déduit

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2) On procède sommet par sommet ; il y a quand même quelques petites astuces pour réduire la taille du code :

* traiter les sommets 2 et 3 en même temps.
* se dispenser de dire que si on est en 4, on modifie l'état pour le rendre égal à 4.

```
def etat_suivant(i):
    if i == 1 :
        etat = 2

    elif i in [2,3]:
        if rd.random() < 1/2 :
            etat = i+1
        else:
            etat = i-1

    return etat.
```

2b. On initialise une liste contenant l'état initial (1 d'après l'énoncé) ; à chaque tour on calcule l'état suivant à l'aide de l'état actuel.

```
def parcours(n):
    L = [1]
    for k in range(n) : # n étapes
        L.append(etat_suivant(L[-1]))   # L[-1] est la dernière
                                        composante de L ; on peut
    return L                            aussi écrire L[len(L)-1].
```

2c. parcours(8) simule donc 8 déplacements du mobile partant de 1.

* La 3° réponse ne part pas de 1
* 1ère sort de l'état 4 alors qu'il est absorbant.

$\boxed{\text{La réponse obtenue est donc la 2ème}}$

2d. C'est la même que 2a sauf qu'on boucle avec un while : on continue tant qu'on n'est pas en 4 et qu'on n'a pas fait n étapes

```
def parcours2(n):
    L=[1]
    while (len(L) < n+1  and L[-1]!=4 :
        L.append (etat_suivant (L[-1]))
    return L
```

(autre solut° : renvoyer la liste dès qu'on y ajoute un "4") :

```
def parcours2(n):
    L=[1]
    for k in range(n):
        if L[-1]==4:
            return L
        else:
            L.append(etat_suivant(L[-1]))
    return L
```

3a. ≃ Cours.
On applique la formule des probabilités totales avec le SCE $((X_n = i))_{1 \leq i \leq 4}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![1,4]\!]$

$$\underbrace{P(X_{n+1}=j)}_{\substack{\text{composante } j \\ \text{de } V_{n+1}}} = \sum_{i=1}^{4} \underbrace{P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)}_{m_{ij}} \underbrace{P(X_n=i)}_{\substack{\text{composante } i \\ \text{de } V_n.}}$$

On reconnait la formule du produit matriciel : on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = V_n M}$$

3b. Récurrence :

* $n=0$: on a bien $V_0 \times M^0 = V_0 I_4 = V_0$.

* si $V_n = V_0 M^n$

alors $V_{n+1} = V_n M = V_0 M^n . M = V_0 M^{n+1}$

d'où l'hérédité ; et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ V_n = V_0 M^n}$

4a. Comme il faut les SEP, pas besoin d'arguments sophistiqués : on résout ${}^tMX = \lambda X$

Pour $\lambda = 0$: ${}^tMX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}y = 0 \\ x + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \\ z = -2t \end{cases} \rightarrow \text{d'où } t = x.$$

Ainsi :

$$E_0({}^t\Pi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ donc } 0 \in Sp({}^t\Pi)$$

De même :

$$X \in E_1({}^t\Pi) \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y = x \\ x + \frac{1}{2}z = y \\ \frac{1}{2}y = z \\ \frac{1}{2}z + \cancel{t} = \cancel{t} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

d'où $\boxed{E_1({}^t\Pi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} \neq \{0\}$ et $1 \in Sp({}^t\Pi)$.

4b.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -(2+\sqrt{3}) \end{pmatrix}}_{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ -3/2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -\sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^t\Pi U = \frac{\sqrt{3}}{2} U \text{ et } U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{d'où } U \text{ est vep de } {}^t\Pi \text{ pour la vap } \frac{\sqrt{3}}{2}}$

4c. Avec le résultat admis, on a donc 4 valeurs propres de ${}^t\Pi$:

$0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Or ${}^t\Pi \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$; donc admet au + 4 valeurs propres, et $\sum_{\lambda \in Sp(\Pi)} \dim E_\lambda(\Pi) \leq 4$.

Ceci montre que

$$Sp({}^t\Pi) = \left\{ 0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

et que tous les sep sont de dimension 1 :

$$\boxed{E_{\sqrt{3}/2}(\Pi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -(2+\sqrt{3}) \end{pmatrix}\right) \; ; \; E_{-\sqrt{3}/2}(\Pi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ -(2-\sqrt{3}) \end{pmatrix}\right)}$$

(E_0 et E_1 vus en 4a).

En "rangeant" cela ds une matrice, et en faisant attention à l'ordre des vap :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -(2+\sqrt{3}) & -(2-\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

$\lambda=0$ $\lambda=1$ ... etc

convient (inversible car obtenue en concaténant les bases des SEP de ${}^t\Pi$)

4d. Soit Q la matrice proposée.

On a $PQ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I_4$; d'où $\boxed{Q = P^{-1}}$

$2\times1 + 2\times1 + 2\times1$

$1\times0 + 0\times6 + 1(\sqrt{3}) + 1(-\sqrt{3})$

mettre 1 ou 2 calculs explicites de coeff pour ne pas être accusé de bluff

... ne SURTOUT pas se lancer ds l'inversion de P par résolut° de système !!

e. ${}^t\Pi = PDP^{-1}$.

Par récurrence : $\bullet$ $({}^t\Pi)^0 = I_4$; et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_4$

$\bullet$ si $({}^t\Pi)^n = PD^nP^{-1}$

alors $({}^t\Pi)^{n+1} = PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I_4}DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

d'où la formule.

Pour $n=0$, la 1° colonne de $({}^t\Pi)^0 = I_4$ est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Pour $n\geq 1$, on met les mains ds le cambouis :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -(2+\sqrt{3}) & -(2-\sqrt{3}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{3}/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-\sqrt{3}/2)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\sqrt{3}/2)^n & (-\sqrt{3}/2)^n \\ 0 & 0 & \sqrt{3}(\sqrt{3}/2)^n & -\sqrt{3}(-\sqrt{3}/2)^n \\ 0 & 0 & (\sqrt{3}/2)^n & (-\frac{\sqrt{3}}{2})^n \\ 0 & 1 & -(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}/2)^n & -(2-\sqrt{3})(-\sqrt{3}/2)^n \end{pmatrix}$$

où la 1° col. de PD^nP^{-1} en multipliant cette dernière matrice par P^{-1} à droite

$$PD^nP^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) & - - & — \\ 2\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) & - & — \\ 2\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) & — & — \\ 6 - 2(2+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - 2(2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & — & — \end{pmatrix}$$

5. $V_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ car initial^t on est en 1 (8)

d'où $V_n = V_0 \Pi^n$ est la 1° ligne de Π^n

il suffit donc de $\boxed{\text{transposer la 1° colonne de } ({}^t\Pi)^n}$ vue ci-dessus.

6a. D'après les règles d'évolut°, on ne peut arriver en 4 qu'en étant en 3 au tour précédent ; on arrive donc pour la 1° fois en 4 au tps j ssi on est en 3 au tps $j-1$ et en 4 au tps j.

$$\Rightarrow \boxed{(Y=j) = (X_{j-1}=3) \cap (X_j = 4)}$$

d'où $P(Y=j) = \cancel{P_{(X_{j-1}=3)}(X_j=4) \times P(X_j=4)}$

$$= P\Big((X_{j-1}=3) \cap (X_j=4)\Big)$$

$$= P_{(X_{j-1}=3)}(X_j=4) \times P(X_{j-1}=3)$$

oups !

$$\boxed{P(Y=j) = \underbrace{\cancel{1/2}}_{③ \xrightarrow[1/2]{} ④} \times \underbrace{\cancel{2}\left(\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{j-1} + \left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)^{j-1}\right)}_{\text{3° composante de } V_{j-1}\text{, d'après 4e}} \cancel{\times} \frac{1}{6}}$$

et $Y(\Omega) = [\![3, +\infty [\![$ car il faut au ⊝ 3 déplacements pour aller en 4 en partant de 1.

6b. On examine la cv absolue de la série de terme général

$$j\, P(Y=j) = \left(j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} \right) \times \frac{1}{6}$$

or on reconnaît les t.g. de séries géom. dérivées de raison $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,
avec $\sqrt{3} \simeq 1,7$ on a bien $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$: $\sum j\, P(Y=j)$ cv absolument.

$$E(Y) = \sum_{j \in Y(\Omega)} j\, P(Y=j)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{\underline{\underline{j=3}}}^{+\infty} \left[j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} \right]$$

. On coupe en 2 (les 2 parties cv)

$$= \frac{1}{6} \sum_{j=3}^{+\infty} j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \sum_{j=3}^{+\infty} j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}$$

or on applique la formule en retranchant les termes $j=1$, $j=2$:

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - 1 \cancel{- 2\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - 1 \cancel{+ 2\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{4}{(2-\sqrt{3})^2} + \frac{4}{(2+\sqrt{3})^2} - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{4(2+\sqrt{3})^2 + 4(2-\sqrt{3})^2}{\left((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\right)^2} - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{4(4 \cancel{+4\sqrt{3}} + 3) + 4(4 \cancel{-4\sqrt{3}} + 3)}{\underbrace{(2^2 - \sqrt{3}^2)^2}_{=1}} - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{6}(56-2) = \frac{54}{6} = \underline{\underline{9}} \;!!$$

7a. Ici on n'a pas besoin de mémoriser tout le parcours.

```
def tirage4():
    etat = 1
    n = 0
    while etat != 4 :
        etat = etat_suivant(etat)
        n = n+1
    return n
```

boucle while tant qu'on n'est pas arrivé en 4 ; et on compte le nb d'étapes effectuées.

7b.

```
def moyenne():
    return np.mean([tirage_4() for k in range(10000)])
```

(pour faire élégant ☺)

On s'attend bien entendu à trouver une valeur proche de $E(4)$; donc $\boxed{\text{environ } 9}$.

8a. Cette fois ça ne marche pas car on peut sortir de l'état 3 : le fait d'être en 2 à $j-1$ et en 3 à j ne dit pas que c'est la première fois qu'on arrive en 3.

8b. Avec les règles de déplacement, on est en 3 pour la 1° fois au tps $2j$ ssi on est en 1 au tps 0

en 2 au tps 1

en 1 au tps 2

⋮

en 2 au tps $2j-1$

en 3 au tps $2j$.

d'où $\boxed{(Z=2j) = (X_0=1)\cap(X_1=2)\cap(X_2=1)\cap(X_3=2)\cdots\cap(X_{2j-1}=2)\cap(X_{2j}=3)}$ (11)

d'où par probas composées

$$P(Z=2j) = \underbrace{P(X_0=1)}_{1}\times P_{(X_0=1)}(X_1=2)\times P_{(X_0=1)\cap(X_1=2)}(X_2=1)$$

$$\times\cdots\times P_{(X_0=1)\cap\cdots\cap(X_{2j-1}=2)}(X_{2j}=3).$$

Mais par propriété de Markov, seul le "dernier conditionn" subsiste

$$P(Z=2j) = P_{(X_0=1)}(X_1=2)\times P_{(X_1=2)}(X_2=1)\times P_{(X_2=1)}(X_3=2)\times\cdots\times P_{(X_{2j-1}=2)}(X_{2j}=3)$$

Ensuite : les $P_{(X_i=1)}(X_{i+1}=2)$ valent 1

les $P_{(X_i=2)}(X_{i+1}=1)$ valent 1/2

$P_{(X_{2j-1}=2)}(X_j=3)$ vaut 1/2.

Il faut bien compter le nombre de 1/2 : $\boxed{P(Z=2j)=\left(\frac{1}{2}\right)^j \quad \forall j\in\mathbb{N}^*}$

↑

pour cela regarder $P(Z=4)$

$P(Z=6)$

⋮ à la main

(et $P(Z=0)=0$)

8c Comme on ne saute que d'un sommet à son voisin : tant qu'on n'est pas en 4, on est sur un sommet impair aux temps pairs, et sur un sommet pair aux temps impairs.

Ainsi $\forall j \in \mathbb{N}$, $P(Z = 2j+1) = 0$ car cet évt est impossible

8d. $Z(\Omega) = \{2, 4, 6, \ldots\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

et pour $E(Z)$ on regarde la cv abs de la série de t.g.

$2k\, P(Z=2k) = 2k \left(\frac{1}{2}\right)^k$; qui est encore une géom dérivée de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k\, P(Z=2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Z) = 4}$$

En moyenne, on atteint 3 pour la 1° fois au bout de 4 déplacem^{ts}.

Problème DS3 bis

(fait maison)

1) a.

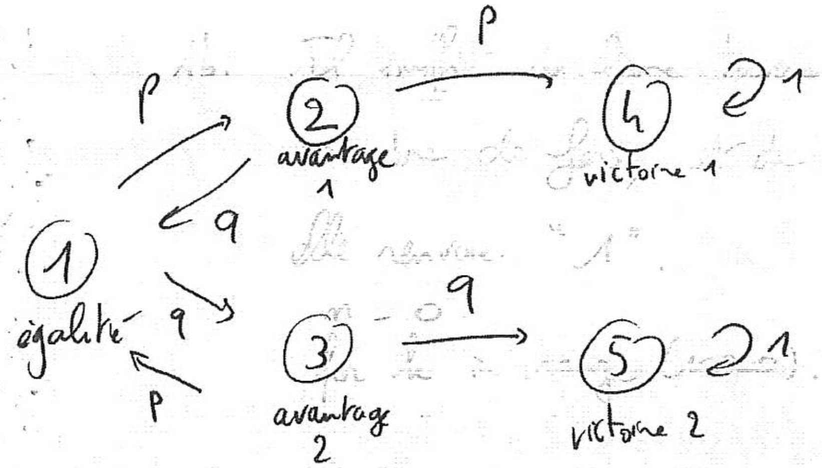
```
def jeu(p):
    score1 = 0
    score2 = 0                                  } scores initiaux à 0
    while abs(score2 - score1) < 2:             // tant qu'il y a moins de 2 pts d'écart
        if rd.random() < p:
            score1 = score1 + 1                 } on joue un point
        else:
            score2 = score2 + 1
    if score1 > score2:
        return 1
    return 2.
```

1b. Il suffit de faire tourner la fonction jeu(2/5) un grand nombre de fois, et de regarder la fréquence avec laquelle elle renvoie "1".

```
n = 0
for k in range(10000):
    if jeu(2/5) == 1:
        n = n + 1
print(n/10000)
```

c) On introduit un compteur de points qu'on renvoie à la fin.

```
def jeu2(p):
    score1 = 0
    score2 = 0
    n = 0
    while abs(score2 - score1) < 2:
        if rd.random() < p:
            score1 = score1 + 1
        else:
            score2 = score2 + 1
        n = n + 1
    if score1 > score2:
        return 1, n
    return 2, n.
```

2) 

3) le coeff (i,j) de M est le poids de la flèche $(i) \to (j)$: on vérifie qu'on a la matrice demandée.

(1ère ligne : $1 \to 2$ avec proba p, $1 \to 3$ avec proba q)
(4° ligne $4 \to 4$ avec proba 1)

4) On résout, avec $V = (x \quad y \quad z \quad t \quad u)$: $V\Pi = V$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = qy + pz \\ y = px \\ z = qx \\ t = py + t \\ u = qz + u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad (\text{avec } p \neq 0) \\ z = 0 \quad (\text{avec } q \neq 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \underline{x = y = z = 0}$

les états stables sont donc les vecteurs $(0, 0, 0, \alpha, \beta)$

avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$; donc $\boxed{\text{les vecteurs } (0,0,0,\alpha,1-\alpha) \text{ où } \alpha \in [0,1]}$

Les blocs cités sont : $Q = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

5) les 2° et 3° colonnes de Q sont colinéaires donc Q n'est pas inversible

On en déduit $0 \in Sp(Q)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X \in E_0(Q) \Leftrightarrow \begin{cases} py + qz = 0 \\ qx = 0 \\ px = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{p}{q} y \\ x = 0 \end{cases}$$

d'où $E_0(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -p/q\, y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -p/q \end{pmatrix} \right) = \underline{Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ q \\ -p \end{pmatrix} \right)}$

On a $Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2pq & 0 & 0 \\ 0 & pq & q^2 \\ 0 & p^2 & pq \end{pmatrix}$

puis $Q^3 = \begin{pmatrix} 2pq & 0 & 0 \\ 0 & pq & q^2 \\ 0 & p^2 & pq \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2p^2q & 2pq^2 \\ 2pq^2 & 0 & 0 \\ 2p^2q & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= 2pq \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{Q^3 = 2pq\, Q}$$

donc $X^3 - 2pq X$ est 1 polynôme annulateur de Q.

$X^3 - 2pq X = 0 \iff X(X^2 - 2pq) = 0$

$\iff X = 0$ ou $X = \pm\sqrt{2pq}$; donc $Sp(Q) \subset \{0, \sqrt{2pq}, -\sqrt{2pq}\}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sqrt{2pq} \text{ et } -\sqrt{2pq} \text{ sont les autres valeurs propres possibles de } Q}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2pq \\ \varepsilon\sqrt{2pq} \\ \varepsilon\sqrt{2pq} \end{pmatrix} = \varepsilon\sqrt{2pq}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2pq}}{\varepsilon} \\ q \\ p \end{pmatrix}$

<u>mais</u> $\underline{\text{comme } \varepsilon = \pm 1,\ 1/\varepsilon = \varepsilon}$

d'où $\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix} = \varepsilon\sqrt{2pq}\begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}$ est non nul, donc est 1 vep pour $\sqrt{2pq}$

$\Rightarrow \sqrt{2pq}$ et $-\sqrt{2pq}$ sont des valeurs propres de Q.

$\boxed{\text{la famille } \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ -p \end{pmatrix} \right\}}$ est une famille de 3 vecteurs

propres de Q associés à des valeurs propres distinctes : elle est libre et c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

8°) $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ s'écrit $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ avec l'écriture par blocs introduite

par l'énoncé.

On en déduit : $MY = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QX \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ 0 \end{pmatrix}$ (car $X \in E_\lambda(Q)$)

$= \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow MY = \lambda Y$ et $\boxed{Y \in E_\lambda(M)}$

9°) $\dim(E_1(M)) = \dim(\operatorname{Ker}(M - I_5))$

$M - I_5 = \begin{pmatrix} -1 & p & q & 0 & 0 \\ q & -1 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & -1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a ses 3 premières lignes libres ($\pm$ évident) et 2 lignes nulles, donc est de <u>rang 3</u>.

Alors $\dim(\ker(M-I_5)) = \dim(\ker(f-Id))$

où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ est canoniqt associé à M

$= 5 - rg(f-Id)$

$= 5 - rg(M-I_5)$

$\boxed{\dim E_1(M) = 2}$

Si on note (C_1, C_2) une base de $E_1(M)$, la question 8 montre que

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2pq} \\ q \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2pq} \\ q \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ -p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \right\}$$ est libre (concaténat° de

bases de ss-espaces propres) donc est une base de vecteurs propres de M.

$\boxed{M \text{ est donc diagonalisable}}$

Les valeurs propres respectives associées sont $\sqrt{2pq}, -\sqrt{2pq}, 0, 1, 1$

Donc si P est la matrice constituée des 5 colonnes ci-dessus, on a

bien $\boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \operatorname{diag}(\sqrt{2pq}, -\sqrt{2pq}, 0, 1, 1)}$

10. On étudie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$p \mapsto p(1-p)$

On a $f'(p) = 1 - 2p$, d'où le tableau de variation :

p	0		$1/2$		1
$f(p)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

et : $\boxed{\forall p \in [0,1],\ 0 \le p(1-p) \le 1/4}$

11. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$

où $D^n = \begin{pmatrix} (\sqrt{2pq})^n & & & & \\ & (-\sqrt{2pq})^n & & (0) & \\ & & 0 & & \\ & (0) & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

D'après 10 : $\forall p \in]0,1[,\ 2pq = 2p(1-p) \in]0, \frac{1}{2}[$

donc $0 < \sqrt{2pq} < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (\pm\sqrt{2pq})^n = 0$.

On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} D^n = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & (0) & \\ & & 0 & & \\ & (0) & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

puis $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = P \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & (0) & \\ & & 0 & & \\ & (0) & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}$

12. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Au rang 1, on veut montrer : $M = \left(\begin{array}{c|c} Q & I_3 R \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$: c'est vrai par définition de ces blocs.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $M^n = \left(\begin{array}{c|c} Q^n & (I_3 + \cdots + Q^{n-1})R \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Q^n & \sum\limits_{k=0}^{n-1} Q^k R \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$

Alors : $M^{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} Q^n & \sum\limits_{k=0}^{n-1} Q^k R \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$

$$M^{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} Q^n.Q + \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q^k R\right).0 & Q^n R + \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q^k.R\right) I_2 \\ \hline 0.Q + I_2.0 & 0.R + I_2^2 \end{array}\right)$$

$$M^{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} Q^{n+1} & \left(\sum_{k=0}^{n} Q^k\right)R \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$$; ce qui établit l'égalité au rg $n+1$.

$\boxed{\text{On a bien l'égalité demandée pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

13. D'après la q.7 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q^n = R \begin{pmatrix} (\sqrt{2pq})^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\sqrt{2pq})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}$

où les colonnes de R sont les vecteurs de la base obtenue en q.7

$\forall p \in]0,1[$ $\quad 2pq = 2p(1-p) \in [0, 1/2]$ d'où $0 < \sqrt{2pq} < 1$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} (\sqrt{2pq})^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\sqrt{2pq})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} Q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} R . 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} . R^{-1} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$ avec les propriétés sur les limites admises

⑤

14.) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q^k\right)(I_3 - Q)$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} Q^k - \sum_{k=0}^{n-1} Q^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} Q^k - \sum_{k=1}^{n} Q^k = \boxed{I_3 - Q^n}$$

15. $I - Q = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -p & -q \\ -q & 1 & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=S}$

donc $(I-Q)\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ q & 1-pq & q^2 \\ p & p^2 & 1-pq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2pq & 0 & 0 \\ 0 & 1-2pq & 0 \\ 0 & 0 & 1-2pq \end{pmatrix} = (1-2pq)I_3$

$(I-Q)S = (1-2pq)I_3$

donc $(I-Q)\left(\frac{1}{1-2pq} S\right) = I_3$

$$\Rightarrow \boxed{(I-Q)^{-1} = \frac{1}{1-2pq}\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ q & 1-pq & q^2 \\ p & p^2 & 1-pq \end{pmatrix}}$$

16. Finalement, $\lim_{n\to+\infty} M^n = \left(\begin{array}{c|c} \lim_{n\to+\infty} Q^n & \lim_{n\to+\infty} \left((I_3+\dots+Q^{n-1})R\right) \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & (I_3-Q)^{-1} R \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = \boxed{\left(\begin{array}{c|c} 0 & NR \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)}$$

avec $(I_3-Q)^{-1}R = \dfrac{1}{1-2pq}\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ q & 1-pq & q^2 \\ p & p^2 & 1-pq \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{1-2pq}\begin{pmatrix} p^2 & q^2 \\ p(1-pq) & q^3 \\ p^3 & q(1-pq) \end{pmatrix}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & \frac{p^2}{1-2pq} & \frac{q^2}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p(1-pq)}{1-2pq} & \frac{q^3}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p^3}{1-2pq} & \frac{q(1-pq)}{1-2pq} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

17. $\mathbb{1}_A$ vaut 0 ou 1 donc suit une loi de Bernoulli.

On a $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$ car $\mathbb{1}_A = 1$ ssi A est réalisé.

Donc $\boxed{\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))}$

18. $\mathbb{1}_{(X_k=j)}$ vaut 1 si $X_k = j$ et 0 sinon.

En sommant sur $k\in\mathbb{N}^*$: $\mathbb{1}_{(X_k=j)}$ est égal au nombre de $k\in\mathbb{N}^*$ tels que $X_k=j$, ce qui est exactement le nombre de fois où le "système" passe par l'état j.

19a. Cours !

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \left(P(X_{n+1}=1) \cdots P(X_{n+1}=5) \right)$

Soit $j \in [\![1,5]\!]$: les probabilités totales avec le SCE $((X_n = i))_{1 \le i \le 5}$

donnent $P(X_{n+1}=j) = \sum_{i=1}^{5} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) \times P(X_n=i)$

$$= \sum_{i=1}^{5} m_{ij} P(X_n=i)$$

et on reconnaît la j-ème composante de la matrice ligne $V_n M$

$$\left(P(X_n=1) \cdots \right) \times \begin{pmatrix} & m_{1j} & \\ & m_{2j} & \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = V_n . M}$

On en déduit, par une récurrence immédiate (mais à ébaucher rapidement sur la copie) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = V_0 M^n.}$

19b. Comme la partie commence à 0-0, l'évènement $(X_0 = 1)$ est certain

donc $V_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$

En effectuant le produit matriciel $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} & M^k & \end{pmatrix}$

on voit que <u>V_k est donné par la $1^{\text{ère}}$ ligne de M^k</u>

$$= \sum_{i=1}^{n} [illegible]$$

[illegible] on remarque [illegible] les composantes [illegible]

$$= [illegible]$$

On a [illegible] [illegible]

493. Cas de [illegible] (θ, φ) [illegible]

[illegible]

On a bien $\underline{P(X_k=j) = (V_k)_j}$ (j-ième composante de V_k)

$$\boxed{P(X_k=j) = (M^k)_{1,j}}$$

20.

$\underline{E(\mathbb{1}_{(X_k=j)}) = P(X_k=j)}$ car $\mathbb{1}_{(X_k=j)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_k=j)$

donc $E(\mathbb{1}_{X_k=j}) = (M^k)_{1,j}$

On en reprenant la question 11, on voit que, si $j\in[\![1,3]\!]$, le coefficient de $(M^k)_{1j}$ est celui de Φ^k

$$M^k = \begin{array}{cc} & \overset{3}{\longleftrightarrow} \\ 3\updownarrow & \left(\begin{array}{c|c} \Phi^k & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow E(\mathbb{1}_{X_k=j}) = (\Phi^k)_{1,j}$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(Y_j) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(\mathbb{1}_{X_k=j}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\Phi^k)_{1,j}$$ est le coefficient $(1,j)$ de $\sum_{k=0}^{+\infty}\Phi^k = N$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y_j) = N_{1,j}}$$

21) le nombre de points joués s'identifie au nombre de déplacements sur le graphe avant d'arriver dans un des deux états 4, 5

Il suffit donc d'additionner les nombres de passage en 1, 2 et 3.

pour l'obtenir.

Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y_1+Y_2+Y_3) = E(Y_1)+E(Y_2)+E(Y_3)$$

$$= N_{1,1}+N_{1,2}+N_{1,3}$$, soit la somme de première ligne de N.

D'après l'expression trouvée en question 15 :

$$E(Y_1+Y_2+Y_3) = \frac{p+q+1}{1-2pq} = \boxed{\frac{2}{1-2pq}}$$

22) A est l'événement "on arrive en 4 avant d'arriver en 5"

On considère A_k l'événement "le joueur 1 gagne en k points"

On part de 0-0 donc A_0 est vide (et A_1 aussi..)

$$A = \bigcup_{k\geq 1} A_k$$ où A_k est l'év^t : $(X_0\leq 3)\cap(X_1\leq 3)\cap\dots\cap$
$\dots\cap(X_{k-1}\leq 3)\cap(X_k=4)$

$$A_k = \left(\bigcap_{i=0}^{k-1}(X_i\leq 3)\right)\cap(X_k=4)$$

Montrons en fait $A_k = (X_{k-1}\leq 3)\cap(X_k=4)$

* Si A gagne au point k, on n'a pas encore gagné au point $k-1$ (!!) donc en $k-1$ on est dans l'un des deux états $1, 2, 3$: donc $(X_{k-1} \leq 3)$; et A gagne en k donc $(X_k = 4)$

Ainsi $A_k \subset \left((X_{k-1} \leq 3) \cap (X_k = 4) \right)$

Réciproq^t si $(X_{k-1} \leq 3)$ et $(X_k = 4)$ on n'a pas pu être en 4 avant l'instant k : le joueur A gagne bien au point k.

$$\Rightarrow A_k = \left((X_{k-1} \leq 3) \cap (X_k = 4) \right)$$

puis
$$A = \bigcup_{k \geq 1} A_k = \bigcup_{k \geq 1} \left((X_{k-1} \leq 3) \cap (X_k = 4) \right)$$
$$= \underline{\bigcup_{k \geq 0} \left((X_k \leq 3) \cap (X_{k+1} = 4) \right)} \quad \text{par décalage d'indice}$$

23. l'union précédente est disjointe (le point auquel A gagne est défini de manière unique)

D'où $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(P((X_k \leq 3) \cap (X_{k+1} = 4) \right)$

on décompose : $(X_k \leq 3) \cap (X_{k+1} = 4)$
$$= \bigcup_{i=1}^{3} \left((X_k = i) \cap (X_{k+1} = 4) \right) \quad \text{(union disjointe)}$$

donc $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{=1}^{3} P(X_k = i \cap X_{k+1} = 4) \right)$

Enfin : $P(X_k = i \cap X_{k+1} = 4)$

$= P(X_k = i) \times P_{(X_k = i)}(X_{k+1} = 4)$

$= (M^k)_{1,i} \times m_{i,4}$

donc $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{3} (M^k)_{1,i} \, m_{i,4} \right)$

et comme $1 \leq i \leq 3$, • $(M^k)_{1,i} = (Q^k)_{1,i}$ (cf q. 20)

• et $m_{i,4} = R_{i,1}$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right) \end{array}$$

d'où $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{3} (Q^k)_{1,i} R_{i,1} \right)$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} (Q^k R)_{1,1}$ en reconnaissant 1 produit matriciel

$= \left[\left(\sum_{k=0}^{+\infty} Q^k \right) \times R \right]_{1,1}$

24°)

$\boxed{P(A) = (NR)_{1,1}}$

le coefficient $(1,1)$ de NR est

donc coefficient $(1,4)$ de $\lim_{n \to +\infty} M^n$

(cf question 16)

ce qui montre $P(A) = \dfrac{p^2}{1-2pq}$ (proba que 1 remporte le jeu)