Devoir surveillé n°3

11/01/2025

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice : Systèmes différentiels

Partie 1 : un système « traditionnel »

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer $\mathrm{rg}(A + I_3)$. En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

   (b) Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de ce sous-espace propre.

   (c) Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire le spectre de A, et des bases de ses sous-espaces propres.

   (d) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible.

   Sans calculer P^{-1}, montrer que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. On considère le système différentiel $(S_1) : \begin{cases} x' = y - 3z \\ y' = x - 3z \\ z' = x + y - 4z \end{cases}$.

   (a) À l'aide de la question précédente, donner l'ensemble des solutions de ce système.

   (b) Quels sont les états d'équilibre de ce système ?

   (c) On utilise la commande `scipy.integrate.odeint` de Python pour résoudre numériquement le système (S_1) sur l'intervalle $[0,3]$.
   On trace ensuite, à l'aide de `matplotlib`, les courbes représentatives des fonctions x, y, z obtenues sur $[0,3]$; on obtient un des tris tracés suivants. Lequel ? Justifier votre réponse.

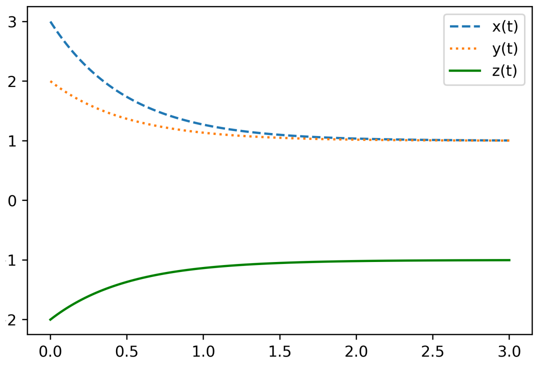

Figure 1

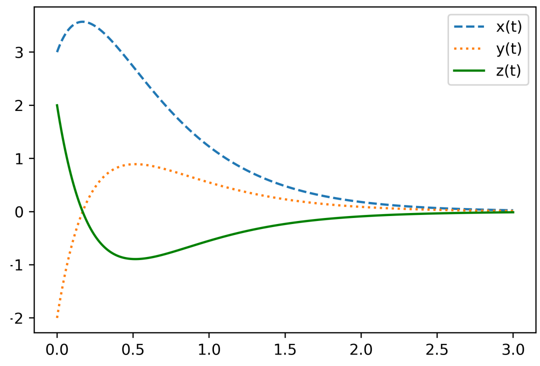

Figure 2

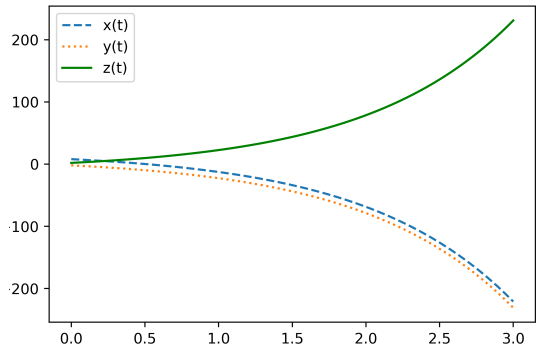

Figure 3

3. (a) Justifier, sans la déterminer, l'existence et l'unicité de la solution de (S) vérifiant $x(0) = 1$, $y(0) = -3$, $z(0) = -1$.
   (b) Déterminer explicitement cette solution.

Partie 2 : une équation différentielle à coefficients non constants

On cherche dans cette partie à résoudre l'équation :

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y' = -2ty + e^{-t^2}$$

4. Soit y une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $z : t \mapsto e^{t^2} y(t)$.
   (a) Montrer que si y est solution de (E), alors z' est constante égale à 1.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Partie 3 : un système différentiel à coefficients non constants

On cherche maintenant à résoudre le système différentiel suivant (dont on notera qu'il n'est pas à coefficients constants) :

$$(\mathrm{S}_2) \ : \ \begin{cases} x' = (-2+2t)x + (-1+2t)y + (3-6t)z + e^{-t^2} \\ y' = (-1+2t)x + (-2+2t)y + (3-6t)z + e^{-t^2} \\ z' = (-1+2t)x + (-1+2t)y + (2-6t)z + e^{-t^2} \end{cases}$$

On note $\mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} -2+2t & -1+2t & 3-6t \\ -1+2t & -2+2t & 3-6t \\ -1+2t & -1+2t & 2-6t \end{pmatrix}$.

5. On note $\mathrm{D}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2t \end{pmatrix}$. Vérifier que $\mathrm{M}(t) = \mathrm{PD}(t)\mathrm{P}^{-1}$.

6. On pose $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(t)$ et on note $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

   Montrer que (S_2) équivaut au système

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -y_2 \\ y_3' = -2ty_3 + e^{-t^2} \end{cases}$$

7. Donner la forme générale des solutions Y de (S') ; puis des solutions X de (S_2) (on explicitera seulement la forme de $x(t)$).

Problème : Étude d'un parcours

Un mobile se déplace aléatoirement entre 4 positions sur un axe notées 1,2,3,4.
Les règles de ce « voyage » sont les suivantes :

- Le mobile est en 1 à l'instant 0.
- Le point 1 est « réfléchissant » , c'est-à-dire que, si à l'instant n le mobile est en 1, il est certain qu'à l'instant $(n+1)$ il sera en 2.
- Si à l'instant n le mobile est en 2, alors à l'instant $(n+1)$, il sera soit en 1, soit en 3, et ceci de façon équiprobable.
- Si à l'instant n le mobile est en 3, alors à l'instant $(n+1)$, il sera soit en 2, soit en 4, et ceci de façon équiprobable.
- Le point 4 est « absorbant » , c'est-à-dire que, si à l'instant n le mobile est en 4, il est certain qu'à l'instant $(n+1)$ il sera encore en 4.

On désigne par X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce mobile à l'instant n.

1. Justifier que $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Tracer le graphe probabiliste associé et justifier que la matrice de transition de ce graphe est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note M cette matrice.

2. Simulation informatique.
   On cherche à modéliser divers phénomènes reliés à cette expérience en Python.
   On supposera les imports suivants effectués :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

   (a) Écrire une fonction `etat_suivant(i)` qui prend un argument un entier $i \in [\![1,4]\!]$, et renvoie l'état du système au rang $n+1$ si son état au rang n est i (ce résultat est donc aléatoire).

   (b) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule un parcours obéissant aux règles ci-dessus. Le programme prendra en argument un entier non nul n et renverra la liste $[\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ de ses positions successives. On prendra soin d'utiliser la question précédente.

```
def parcours(n):
    L = ...
    for k in .... :
        L.append(...)
    return L
```

   (c) Cette fonction étant définie, on tape dans une console :

```
parcours(8)
```

et on obtient une des trois réponses suivantes : laquelle ? (justifier)

- `[1,2,1,2,3,4,3,4,4]`
- `[1,2,1,2,3,4,4,4,4]`
- `[2,1,2,3,2,3,4,4,4]`

(d) Cette fonction est assez maladroite, car 4 est un état absorbant : si une des composantes de la liste est 4, les suivantes le seront automatiquement.
Écrire une fonction `parcours2` qui renvoie la liste des positions dès que la position 4 est atteinte ; et qui renvoie le même résultat que `parcours` si le 4 n'est pas atteint au cours des n étapes.
Ainsi, si la fonction `parcours` *renvoie* `[1,2,1,2,3,4,4,4,4]`, *la fonction* `parcours2` *doit renvoyer* `[1,2,1,2,3,4]`.

3. (a) On note $V_n = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n = 1) & \mathbb{P}(X_n = 2) & \mathbb{P}(X_n = 3) & \mathbb{P}(X_n = 4)\end{pmatrix}$. Vérifier qu'on a $V_{n+1} = V_n M$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 M^n$.

4. (a) Vérifier que 0 et 1 sont des valeurs propres de ${}^tM$, et donner les sous-espaces propres associés.
   (b) Montrer que la colonne $\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ 1\\ -(2+\sqrt{3})\end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$ et donner la valeur propre associée.

   On admet qu'on a aussi $\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\\ 1\\ -(2-\sqrt{3})\end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{3}/2}({}^tM)$.

   (c) En déduire le spectre et les sous-espaces propres de ${}^tM$. Déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, de première ligne $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, telle que ${}^tM = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

   (d) Vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 0\\ 6 & 6 & 6 & 6\\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0\\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0\end{pmatrix}$.

   (e) Montrer que $({}^tM)^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter la première colonne de $({}^tM)^n$ (qui est donc la première ligne de M^n).
   On distinguera les cas $n = 0$ et $n \geqslant 1$.

5. Préciser V_0 et en déduire, pour tout entier naturel n, la loi de X_n.

On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre le point 4 pour la première fois.

6. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 3 :

$$(Y = j) = (X_{j-1} = 3) \cap (X_j = 4)$$

   puis donner la loi de Y.
   (b) Montrer que Y possède une espérance et en déduire que le nombre moyen de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre le point 4 pour la première fois est égal à 9.

7. (a) En utilisant les fonctions Python codées précédemment; programmer une fonction `tirage_Y` simulant un tirage de la variable aléatoire `Y` (on suppose que le point 4 est atteint presque sûrement à chaque parcours).
   (b) Écrire un code qui renvoie la moyenne de 10 000 tirages successifs de la variable Y. Que s'attend-on à trouver ?

On désigne par Z la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre le point 3 pour la première fois.

8. (a) Pourquoi ne peut-on pas écrire, d'une manière analogue à celle utilisée dans la première question de cette partie, que : $(Z = j) = (X_{j-1} = 2) \cap (X_j = 3)$?

(b) Exprimer, pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'événement $(Z = 2j)$ à l'aide d'événements liés aux variables $X_0, X_1, \dots, X_{2j}$. En déduire $\mathbb{P}(Z = 2j)$ pour tout entier naturel j.

(c) Pour tout entier naturel j, calculer $\mathbb{P}(Z = 2j + 1)$.

(d) En déduire que Z possède une espérance, puis déterminer le nombre moyen de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre B pour la première fois.