Devoir surveillé n°3bis

11/01/2025

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice : Systèmes différentiels

Partie 1 : un système « traditionnel »

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer $\mathrm{rg}(A + I_3)$. En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

   (b) Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de ce sous-espace propre.

   (c) Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire le spectre de A, et des bases de ses sous-espaces propres.

   (d) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible.

   Sans calculer P^{-1}, montrer que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. On considère le système différentiel $(S_1) : \begin{cases} x' = y - 3z \\ y' = x - 3z \\ z' = x + y - 4z \end{cases}$.

   (a) À l'aide de la question précédente, donner l'ensemble des solutions de ce système.

   (b) Quels sont les états d'équilibre de ce système ?

   (c) On utilise la commande `scipy.integrate.odeint` de Python pour résoudre numériquement le système (S_1) sur l'intervalle $[0,3]$.
   On trace ensuite, à l'aide de `matplotlib`, les courbes représentatives des fonctions x, y, z obtenues sur $[0,3]$; on obtient un des tris tracés suivants. Lequel ? Justifier votre réponse.

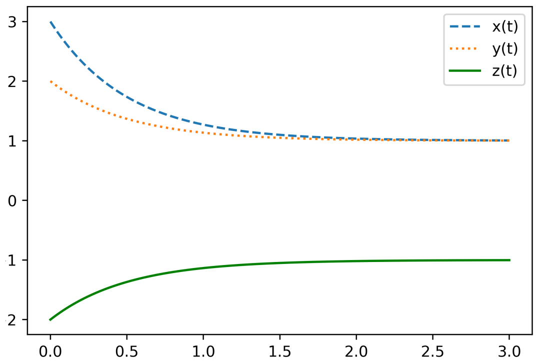

Figure 1

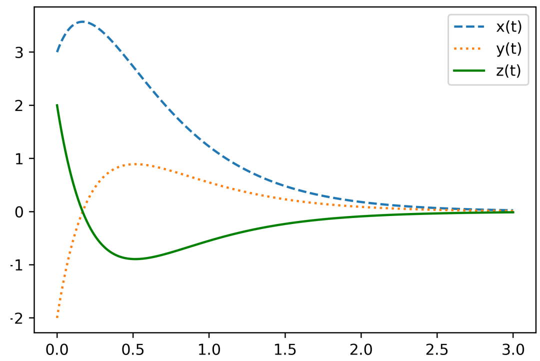

Figure 2

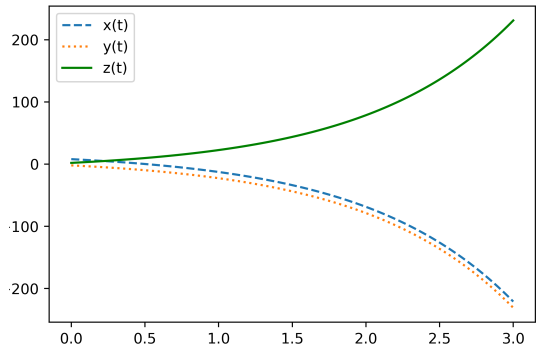

Figure 3

3. (a) Justifier, sans la déterminer, l'existence et l'unicité de la solution de (S) vérifiant $x(0) = 1$, $y(0) = -3$, $z(0) = -1$.

   (b) Déterminer explicitement cette solution.

Partie 2 : une équation différentielle à coefficients non constants

On cherche dans cette partie à résoudre l'équation :

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y' = -2ty + e^{-t^2}$$

4. Soit y une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $z : t \mapsto e^{t^2} y(t)$.

   (a) Montrer que si y est solution de (E), alors z' est constante égale à 1.

   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Partie 3 : un système différentiel à coefficients non constants

On cherche maintenant à résoudre le système différentiel suivant (dont on notera qu'il n'est pas à coefficients constants) :

$$(\mathrm{S}_2) \ : \ \begin{cases} x' = (-2+2t)x + (-1+2t)y + (3-6t)z + e^{-t^2} \\ y' = (-1+2t)x + (-2+2t)y + (3-6t)z + e^{-t^2} \\ z' = (-1+2t)x + (-1+2t)y + (2-6t)z + e^{-t^2} \end{cases}$$

On note $\mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} -2+2t & -1+2t & 3-6t \\ -1+2t & -2+2t & 3-6t \\ -1+2t & -1+2t & 2-6t \end{pmatrix}$.

5. On note $\mathrm{D}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2t \end{pmatrix}$. Vérifier que $\mathrm{M}(t) = \mathrm{P}\mathrm{D}(t)\mathrm{P}^{-1}$.

6. On pose $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(t)$ et on note $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

   Montrer que (S_2) équivaut au système

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -y_2 \\ y_3' = -2ty_3 + e^{-t^2} \end{cases}$$

7. Donner la forme générale des solutions Y de (S') ; puis des solutions X de (S_2) (on explicitera seulement la forme de $x(t)$).

Problème 2 (Markov vs. Djokovic)

Dans ce problème, on aura à discuter des limites de suites de matrices.
Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, *on note* $\mathrm{A}_{i,j}$ *son coefficient à la* i*-ème ligne et la* j*-ème colonne.*
On dit qu'une suite de matrices $(\mathrm{A}_n) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ *tend vers la matrice B pour* $n \to +\infty$ *si, pour tous* $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{A}_n)_{i,j} = \mathrm{B}_{i,j}$ *(convergence coefficient par coefficient).*

On admet que les règles de calcul suivantes sont valables :

- *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n = \mathrm{B}$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n) = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ *;*
- *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n = \mathrm{B}$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{A}_n \mathrm{B}_n) = \mathrm{AB}$.

On considère deux joueurs de tennis qui s'affrontent dans un jeu. On simplifie les règles usuelles de la manière suivante : initialement, il y a « égalité » entre les deux joueurs. Le premier joueur qui marque un point prend l'« avantage » . Si ce même joueur marque un second point dans la foulée il gagne le jeu ; si l'autre joueur marque, on revient à égalité.
On se déplace donc entre 5 états :

- égalité (état 1)
- avantage joueur 1 (état 2)
- avantage joueur 2 (état 3)
- victoire joueur 1 (état 4)
- victoire joueur 2 (état 5).

On considère que le joueur 1 gagne un point avec probabilité $p \in]0,1[$, et le joueur 2 avec probabilité $q = 1 - p$.

1. Modélisation informatique.
   On suppose importés dans Python les packages suivants :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

   (a) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule un jeu et renvoie le numéro du joueur gagnant.
   On remarquera qu'un joueur gagne dès qu'il a marqué deux points de plus que son adversaire.

```
def jeu(p):
    score1 = ...
    score2 = ...
    while ... :
        if ... :
            score1 = score1+1
        else:
            score2 = score2+1
    if ...
        return 1
    return 2
```

(b) Proposer un script qui donne une approximation de la probabilité que le joueur 1 gagne le jeu dans le cas $p = \frac{2}{5}$.

(c) Modifier la fonction `jeu` pour qu'elle renvoie, en plus du joueur gagnant, le nombre de points joués au cours du jeu.

On suppose que les joueurs ne se fatiguent pas, ce qui justifie qu'on est en présence d'une chaîne de Markov qu'on notera $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = [\![1,5]\!]$ et $(X_n = i)$ est l'événement : « après le i-ème point, le score est donné par l'état i » (avec la numérotation ci-dessus).

2. Tracer le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov.

3. Vérifier que la matrice de transition de cette chaîne est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & p & q & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(on expliquera en détail les 1ère et 4ème lignes de M).

4. Déterminer les états stables de cette chaîne.

On adopte une *écriture par blocs* de la matrice M : on voit qu'on a

$$M = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$$

où $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, et le bloc 0 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$; on note $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$. On admet qu'on a alors

$$MX = \begin{pmatrix} QX_1 + RX_2 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que Q n'est pas inversible. En déduire une valeur propre et un sous-espace propre de Q.

6. Montrer que $Q^3 = 2pqQ$. Quelles sont les autres valeurs propres possibles de Q ?

7. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Calculer $Q \times \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}$. En déduire une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de Q.

8. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(Q)$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_\lambda(Q)$. Montrer que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_\lambda(M)$.

9. Déterminer $\dim(E_1(M))$ et en déduire que M est diagonalisable.

   Montrer que $M = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \sqrt{2pq} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2pq} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et P est une matrice inversible.

10. Montrer : $\forall\, p \in]0,1[,\ 0 \leqslant p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

11. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$ en fonction de P et P^{-1}.

On donne maintenant un autre moyen de déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}^n$.
On admet le principe du *calcul par blocs* : si $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ s'écrivent

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \\ \hline \mathrm{A}_3 & \mathrm{A}_4 \end{array}\right) \text{ et } \mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \hline \mathrm{B}_3 & \mathrm{B}_4 \end{array}\right)$$

alors on a

$$\mathrm{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 + \mathrm{A}_2\mathrm{B}_3 & \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{A}_2\mathrm{B}_4 \\ \hline \mathrm{A}_3\mathrm{B}_1 + \mathrm{A}_4\mathrm{B}_3 & \mathrm{A}_3\mathrm{B}_2 + \mathrm{A}_4\mathrm{B}_4 \end{array}\right)$$

(les blocs étant du même format que ceux de l'écriture par blocs introduite plus haut)

12. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{M}^n = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Q}^n & (\mathrm{I}_3 + \mathrm{Q} + \cdots + \mathrm{Q}^{n-1})\mathrm{R} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_2 \end{array}\right)$.

13. Montrer : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Q}^n = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

14. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{I}_3 + \mathrm{Q} + \cdots + \mathrm{Q}^{n-1})(\mathrm{I}_3 - \mathrm{Q}) = \mathrm{I}_3 - \mathrm{Q}^n$.

    On admet qu'on peut conclure de la question précédente que :

$$\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{I}_3 + \mathrm{Q} + \cdots + \mathrm{Q}^{n-1}) = (\mathrm{I}_3 - \mathrm{Q})^{-1}$$

15. Calculer $(\mathrm{I} - \mathrm{Q}) \times \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ q & 1-pq & q^2 \\ p & p^2 & 1-pq \end{pmatrix}$. En déduire $(\mathrm{I} - \mathrm{Q})^{-1}$.

On note $\mathrm{N} = (\mathrm{I} - \mathrm{Q})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Q}^k$. On a donc $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

16. Conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}^n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{NR} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{p^2}{1-2pq} & \dfrac{q^2}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{p(1-pq)}{1-2pq} & \dfrac{q^3}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{p^3}{1-2pq} & \dfrac{q(1-pq)}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse maintenant à des quantités donnant le nombre moyen de points joués pour gagner un jeu.
Pour un état $j \in [\![1,3]\!]$, on note Y_j la variable aléatoire mesurant le nombre de passages dans l'état j au cours du jeu (éventuellement infini).
Pour A un événement, on note $\mathbb{1}_\mathrm{A}$ l'*indicatrice de l'événement A* : c'est la variable aléatoire définie par $\mathbb{1}_\mathrm{A}(\omega) = 1$ si $\omega \in \mathrm{A}$, et $\mathbb{1}_\mathrm{A}(\omega) = 0$ sinon.

17. Montrer que $\mathbb{1}_\mathrm{A} \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbb{P}(\mathrm{A}))$.

18. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_k = j)}$ est une variable aléatoire égale au nombre de passages dans l'état j au cours de la marche.

19. Soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{V}_n = (\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 1) \ldots \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 5))$ la matrice ligne à 5 éléments contenant la loi de X_n.

    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{V}_n\mathrm{M}$; en déduire $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_0\mathrm{M}^n$.

    (b) Que vaut V_0 ? Montrer : $\forall j \in [\![1,5]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = j) = \left(\mathrm{M}^k\right)_{1,j}$.

20. Montrer que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(\mathrm{X}_k = j)}) = (\mathrm{Q}^k)_{1,j}$; en déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_j) = \mathrm{N}_{1,j}$.
    (On admettra la convergence des sommes infinies manipulées dans cette question).

21. Montrer que la variable comptant le nombre de points joués est $\mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \mathrm{Y}_3$. En déduire son espérance.

On calcule enfin la probabilité qu'a chaque joueur de gagner le jeu.

22. Soit A l'événement : « le joueur 1 gagne le jeu » . Montrer que $A = \bigcup_{k \geqslant 0} \big((X_k \leqslant 3) \cap (X_{k+1} = 4) \big)$.

23. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{3} (Q^k)_{1,i} R_{i,1} \right) = (NR)_{1,1}$.

24. En déduire la probabilité que le joueur 1 gagne le jeu.