ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Programme de colle n°13

Semaine du 13/01

Systèmes différentiels
Relations de comparaison sur les fonctions

Pour cette colle, ce qui tient lieu d'« exercice étoilé » est de savoir résoudre un système différentiel pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, avec n pas trop grand.

Systèmes différentiels linéaires

- Rappels d'ECG1 : résolution, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, de $y' + ay = 0$, $y'' + ay' + by = 0$ (lorsque l'équation caractéristique a au moins une racine réelle).
- Résolution d'équations non homogènes (la recherche d'une solution particulière doit être guidée).
- Prise en compte d'une condition initiale.
- Systèmes différentiels $X' = AX$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
  Résolution par diagonalisation de A, en posant $X = PY$; ou en écrivant $X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i} t$ où (C_i) est une base de vecteurs propres.
- Théorème de Cauchy : existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy (cas scalaire d'ordre 1 ou d'ordre 2 ; cas vectoriel)
- Quelques aspects qualitatifs :
  - trajectoire (l'ensemble des $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$
  - trajectoire convergente (les x_i ont une limite finie pour $t \to +\infty$)
  - point d'équilibre (ce sont les solutions constantes).

  Résultats associés : pour le système $(S)\ :\ X' = AX$:
  - Les points d'équilibre de (S) sont les éléments de $\mathrm{Ker}(A)$.
  - Si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-$, toute trajectoire converge vers un point d'équilibre.
  - Si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^*$, toute trajectoire converge vers $(0, \dots, 0)$.
  - Si A admet une valeur propre > 0 il existe des solutions divergentes.

Relations de comparaison

Comparaison de fonctions

- Relations o et $\sim$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ (fonctions définies sur un voisinage de a, sauf éventuellement en a), de $\pm\infty$.
- En pratique, on utilisera la caractérisation $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ pour g ne s'annulant pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a ; de même $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- Comparaisons usuelles au voisinage de 0, de $+\infty$ (croissances comparées : exponentielles vs. puissances vs. logarithmes).

- Équivalents classiques en 0 : $\ln(1+x)$, e^x-1, $(1+x)^\alpha-1$.
Équivalent d'une fonction polynômiale en 0, en $\pm\infty$.
Pratique de la composition : par ex, si $f(x)\to 0$ alors $\ln(1+f(x))\sim f(x)$.

- Application : calcul de limites.

Développements limités (en fin de semaine)

Dans le cadre du programme, on se limite aux DL à l'ordre 2.

- Définition : existence d'une écriture $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a+b(x-x_0)+c(x-x_0)^2+o\big((x-x_0)^2\big)$.
En pratique $x_0=0$; si ce n'est pas le cas on posera $h=x-x_0$ pour se ramener à une variable de limite nulle.

- Cas d'une fonction dérivable en x_0 : l'existence d'un DL_1 en x_0 équivaut à la dérivabilité en x_0 ; la partie principale est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 ; le terme suivant, s'il existe, donne la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0.

- Formule de Taylor-Young pour f $\mathscr{C}^2$ en x_0 (démo hors programme).

- DLs en 0 à connaître : $\ln(1+x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$ (les cas particuliers : $\alpha=-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$ doivent être connus directement).

- Addition, multiplication de DLs. Composition (DL de $f\big(\varphi(x)\big)$, avec $\varphi(x)\to 0$).
« Gestion de la précision » : si $m\leqslant n$, $o(x^m)+o(x^n)=o(x^m)$; un $o(x^n)$ « absorbe » tous les termes en x^k et $o(x^k)$ pour $k\geqslant n$.
Pas de discussion théorique à ce propos ; il faut juste savoir faire des calculs cohérents, éviter d'écrire des termes qui s'avéreront inutiles... on évitera des calculs trop techniques.

- Exemples de développements asymptotiques : développement en $\pm\infty$ en puissances de $\dfrac{1}{x}$, ou $\dfrac{1}{n}$.
Application : nature de séries numériques.
NB : les asymptotes obliques ne sont plus au programme.