

Comparaison des fonctions, développements limités

Exercices

Exercice 1. (Équivalents)

Donner des équivalents simples en $x \rightarrow +\infty$, puis en $x \rightarrow 0$, des expressions suivantes :

$$\begin{array}{cccc} x^3 - x & x^4 - x^2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} & e^{2x} - x^5 & xe^x + x^4 \\ xe^{2x} + e^{3x} & \ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} & x \ln(x) + x^{3/2} & \\ \frac{2}{x^5} - e^{-x} & \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & \ln\left(\frac{x+2}{x^3}\right) & \end{array}$$

Dans le dernier cas, on pourra factoriser la dernière expression dans le \ln par $\frac{1}{x^2}$ pour examiner l'un des deux équivalents.

Exercice 2. (Calcul de développements limités et applications) (*)

Calculer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des expressions suivantes.

Pour les fonctions f et g , déduire de ce DL l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction ; ainsi que, si possible, la position relative de la courbe et de la tangente.

$$e^{2x} - 2\ln(1+x) \quad f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+x}} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \quad \frac{1}{2-x} \quad (1-x)^x$$

Exercice 3. (Calcul de développements limités, plus difficile)

Calculer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des expressions suivantes.

Déduire de ces DL l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction ; ainsi que, si possible, la position relative de la courbe et de la tangente.

$$e^{\sqrt{1+x}} \quad \frac{1}{1+\ln(1+x)} \quad \frac{1}{1+e^x}$$

Exercice 4. (Développements en en $a \neq 0$, en $\pm\infty$)

- Donner le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$ au point $x_0 = 1$.
- Développer les expressions suivantes à la précision $\frac{1}{x^2}$ (ie les écrire sous la forme $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$) au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} \quad \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

NB : pour le second, montrer que $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

- Déterminer a, b, c réels tels que $\sqrt{1+x^2}e^{1/x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 5. (Calcul de limites) (*)

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^4 - x^3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x+1} + \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(2^{1/n} - 1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right) - 1 \right) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2n^2}} - n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Dans le cas d'une suite de limite nulle, donner également la nature de $\sum u_n$.**Exercice 6 (Étude locale d'un prolongement).** Soit f définie par $f(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f ; montrer que f est \mathcal{C}^1 sur cet ensemble.
2. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On notera \tilde{f} ce prolongement.
3. Montrer que \tilde{f} est dérivable en 0. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 à sa courbe représentative.
4. Montrer que \tilde{f} est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
5. On admet que : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Déterminer la position relative de la courbe de \tilde{f} et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 7. On reprend un exercice de la feuille de TD sur les séries.Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

On a vu que :

- $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$. Ainsi la série $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge ; comme elle est à termes négatifs, ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. On a donc, par sommation télescopique, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$; d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- De même, en posant $v_n = nu_n$, l'étude de la série de terme général $\ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$ montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = +\infty$.

Ainsi u_n tend vers 0, mais moins vite que $\frac{1}{n}$ (car la limite précédente donne $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$).On va utiliser un argument similaire pour donner un équivalent de u_n . Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $w_n = n^\alpha u_n$.**NB : pour simplifier un peu les calculs, on traite $\ln \left(\frac{w_n}{w_{n-1}} \right)$ au lieu de $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.**

1. Pour $n \geq 2$, donner l'expression de $\ln \left(\frac{w_n}{w_{n-1}} \right)$.
2. Donner un développement de $\ln \left(\frac{w_n}{w_{n-1}} \right)$ à l'ordre $o \left(\frac{1}{n^2} \right)$.
3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \ell \neq 0$ ssi $\alpha = \frac{1}{2}$.
On a donc montré que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{\sqrt{n}}$.

Exercice 8. (Étude d'une suite implicite)

Toutes les relations de comparaison dans cet exercice s'entendent pour $n \rightarrow +\infty$.

1. On reprend une suite implicite rencontrée dans la feuille d'exercices sur les suites : u_n est l'unique solution de l'équation $nx = e^{-x}$. On a donc par définition $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n}$ (*).

On a vu que $u_n \sim \frac{1}{n}$; ceci permet d'écrire

$$u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On souhaite maintenant être plus précis. On note alors $u_n = \frac{1}{n} + v_n$, avec $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- (a) En injectant cette égalité dans la formule (*), montrer que

$$\frac{1}{n} + v_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

- (b) En déduire que $v_n \sim -\frac{1}{n^2}$.

Grâce aux développements limités, nous sommes donc passés de $u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ à $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. **(Plus technique)** On continue : on pose maintenant $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + w_n$, avec $w_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

En réinjectant cette relation dans la formule (*), montrer que $w_n \sim \frac{3}{2n^3}$.

On peut itérer cette méthode pour obtenir un développement de plus en plus précis de u_n ; mais il faut pour cela un DL d'exp à un ordre supérieur à 2.

Indications

1 Réponses :

En $+\infty$:

- x^3 (plus grande puissance)
- x^4 (idem)
- e^{2x} (faire le quotient et conclure par crois. comp. basique)
- xe^x (idem)
- e^{3x} (idem)
- $\ln(x)$ (qui tend vers $+\infty$ alors que l'autre terme de la somme tend vers 0) ;
- $x^{3/2}$ (par faiblesse du ln devant les puissances ; mais le montrer par quotient)
- $\frac{2}{x^5}$ (croissance comp., à montrer par quotient)
- $\frac{2}{x}$ (reconnaître $\ln(1+h), h \rightarrow 0$;
- $-2\ln(x)$ (le contenu su ln équivaut à x^{-2} mais ça ne prouve rien ; faire le quotient)

En 0 :

- $-x$ (plus petite puissance)
- $-\frac{1}{x^2}$ (idem)
- 1 (limite réelle non nulle)
- xe^x (car $xe^x \sim x$ et $x^4 = o(x)$; mais faire le quotient)
- 1 (limite réelle non nulle)
- $\ln(x)$ (faire le quotient et reconnaître une croiss comp) ;
- $x \ln(x)$ (idem)
- $\frac{2}{x^5}$ (un terme infini, un terme fini – mais faire le quotient)
- $-\ln(x)$ (couper le ln en 2 pour conjecturer et faire le quotient)
- $-3\ln(x)$ (idem)

2

- $e^{2x} - 2\ln(1+x) = 1 + 3x^2 + o(x^2)$.
- $f(x) = e^{2x}(1+x)^{-1/2} = 1 + 3x/2 + 11x^2/8 + o(x^2)$.
Le terme en $a + bx$ donne la tangente, et le terme suivant du DL la position relative avec cette tangente.
- $g(x) = 1 - \frac{3}{2}(x^2) + o(x^2)$.
- $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$
- $\exp(x \ln(1-x)) = 1 - x^2 + o(x^2)$.

3

- $e^{\sqrt{1+x}} = e(1+x/2 + o(x^2))$.
Attention ici on ne peut pas conclure sur la position relative !
- $\frac{1}{1+\ln(1+x)} = 1 - x + 3x^2/2 + o(x^2)$.
- $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x^2)$.

4

1. Avec $x = 1+h$, $\sqrt{1+x+x^2} = \sqrt{3+3h+h^2} = \sqrt{3} \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{24} + o(h^2) \right)$ donc $\sqrt{1+x+x^2} \underset{x \rightarrow 1}{=} \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{24}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \right)$.

Équation de la tangente : $y = \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{2}(x-1) \right)$; écart $\sim \frac{\sqrt{3}}{24}(x-1)^2 \geq 0$ donc la courbe est au-dessus.

2.

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

3.

$$\sqrt{1+x^2} e^{1/x} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} e^{1/x} = x + 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

5

- Passer au même dénominateur.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$
- Le numérateur équivaut à $-x^2$. On trouve $\frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^4 - x^3} \rightarrow -\infty$.

- L'expression à développer vaut $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} + x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$; on trouve le développement $-\frac{3}{2x} + o(1/x)$ (attention à la précision, en $1/x$ seulement).
- Variable dans la puissance donc mise sous forme exponentielle. $\rightarrow \ln(2)$.
- $n \sim_{+\infty} \frac{1}{4n}$.
- Il faut pousser les DL en $1/n^4$, car au final la multiplication par n^2 donne un $o(1/n^2)$ nécessaire à la discussion). Tous les termes du développement s'annulent, SAUF LE $o(1/n^2)$. Et on peut donc conclure sur la limite de la suite et la nature de la série.

6 1. Tableau de signes sur la quantité dans le ln.

2. Étudier la limite en 0; elle est usuelle.

3. Taux de variation; il n'y a pas d'autre méthode !!

Ici, par rapport à la limite précédente, il faut pousser le DL un cran plus loin.

On trouve $f'(0) = \frac{1}{2}$.

4. Il s'agit surtout de montrer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = \frac{1}{2}$.

$f'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$ et le numérateur se développe en $x^2/2 + o(x^2)$.

5. Ce nouveau terme permet de pousser le DL de f un cran plus loin: $f(x) = x/2 + x^2/24 + o(x^2)$. Le nouveau terme est l'écart entre $f(x)$ et la tangente $x/2$: on connaît son signe au voisinage de 0.

7 1. On simplifie des factorielles à tour de bras.

On peut décomposer le calcul en

- $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n}$

- donc $\frac{w_n}{w_{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-\alpha} \frac{2n-1}{2n}$

- donc $\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right) = -\alpha \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$

2. Pas de souci conceptuel: $1/n \rightarrow 0$ donc on peut développer en puissances de $1/n$.

On trouve: $\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{8}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

3. Question pas très directe mais on est en TD:

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, la série de terme général $\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ converge. Avec des arguments télescopiques, donc $\ln(w_N)$ admet une limite finie a pour $N \rightarrow +\infty$; enfin $w_N = e^{\ln(w_N)} \rightarrow e^a = \ell > 0$.

Par contre si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, la série de terme général $\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ diverge.

Le terme général de la série est de signe constant (au moins à partir d'un certain rang, information que nous fournit l'équivalent); la série diverge; donc les sommes partielles tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par les mêmes calculs on en déduit que $\ln(w_N) \rightarrow -\infty$ (donc $w_N \rightarrow 0$) si $\alpha < \frac{1}{2}$, et $\ln(w_N) \rightarrow +\infty$ (donc $w_N \rightarrow +\infty$) si $\alpha > \frac{1}{2}$.

8 1. (a) On a $u_n = \frac{1}{n} \exp(u_n)$ et $u_n = \frac{1}{n} + v_n$: $\frac{1}{n} + v_n = \frac{1}{n} \exp\left(-\underbrace{\left(\frac{1}{n} + v_n\right)}_{\rightarrow 0}\right)$ et on développe l'exponentielle. Réfléchir à l'ordre de

grandeur du $o\left(\frac{1}{n} + v_n\right)$.

(b) Développer et simplifier.

2. On part cette fois de $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + w_n = \frac{1}{n} \exp\left(-\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + w_n\right)\right)$.

Ne pas oublier que $w_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{w_n}{n} = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ ce qui permet d'absorber beaucoup de termes sous-dominants dans les $o(\dots)$.

À la fin on trouve $w_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2n^3}$.