Programme de colle n°14

Semaine du 20/01

Relations de comparaison sur les fonctions
Intégration sur un segment (révisions d'ECG1)

Pour cette colle, les exercices étoilés du TD9 sont exigibles.

Relations de comparaison

Comparaison de fonctions

- Relations o et $\sim$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ (fonctions définies sur un voisinage de a, sauf éventuellement en a), de $\pm\infty$.
- En pratique, on utilisera la caractérisation $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ pour g ne s'annulant pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a ; de même $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- Comparaisons usuelles au voisinage de 0, de $+\infty$ (croissances comparées : exponentielles vs. puissances vs. logarithmes).
- Équivalents classiques en 0 : $\ln(1+x)$, $e^x - 1$, $(1+x)^\alpha - 1$.
  Équivalent d'une fonction polynômiale en 0, en $\pm\infty$.
  Pratique de la composition : par ex, si $f(x) \to 0$ alors $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$.
- Application : calcul de limites.

Développements limités

Dans le cadre du programme, on se limite aux DL à l'ordre 2.

- Définition : existence d'une écriture $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + o\big((x-x_0)^2\big)$.
  En pratique $x_0 = 0$; si ce n'est pas le cas on posera $h = x - x_0$ pour se ramener à une variable de limite nulle.
- Cas d'une fonction dérivable en x_0 : l'existence d'un DL_1 en x_0 équivaut à la dérivabilité en x_0 ; la partie principale est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 ; le terme suivant, s'il existe, donne la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0.
- Formule de Taylor-Young pour f $\mathscr{C}^2$ en x_0 (démo hors programme).
- DLs en 0 à connaître : $\ln(1+x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$ (les cas particuliers : $\alpha = -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$ doivent être connus directement).
- Addition, multiplication de DLs. Composition (DL de $f\big(\varphi(x)\big)$, avec $\varphi(x) \to 0$).
  « Gestion de la précision » : si $m \leqslant n$, $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$; un $o(x^n)$ « absorbe » tous les termes en x^k et $o(x^k)$ pour $k > n$.
  Pas de discussion théorique à ce propos ; il faut juste savoir faire des calculs cohérents, éviter d'écrire des termes qui s'avéreront inutiles… on évitera des calculs trop techniques.
- Exemples de développements asymptotiques : développement en $\pm\infty$ en puissances de $\dfrac{1}{x}$, ou $\dfrac{1}{n}$.
  Application : nature de séries numériques.
  NB : les asymptotes obliques ne sont plus au programme.

Intégration sur un segment d'une fonction continue (rappels de 1ère année)

- Définition : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie lorsque que f est continue sur $[a,b]$; alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ où F est une primitive quelconque de f.
- Propriétés usuelles : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Méthodes de calcul :
  - Recherche de primitives « à vue » en reconnaissant des formes usuelles. Le tableau à connaître est le suivant :

Fonction	Primitive
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{ax+b} \quad \left(a\in\mathbb{R}^*\right)$	$\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$
$e^{ax} \quad \left(a\in\mathbb{R}^*\right)$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$
$u'(x).\big(u(x)\big)^\alpha,\ \alpha\neq -1$	$\dfrac{\big(u(x)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x).e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$

  - Intégration par parties (les fonctions en jeu sont $\mathscr{C}^1$)
  - Changement de variable : la formule n'est pas à connaître mais il faut savoir le faire en pratique. Tout changement non évident devra faire l'objet d'indications.
- Étude de suites d'intégrales : notamment, majorations et encadrements par croissance de l'intégrale.
- Étude d'une fonction des bornes de l'intégrale (notamment : dérivation).