Intégration

Exercices de révision

Rappel : tableau des primitives usuelles

NB : ce tableau sera précisé dans le cours ; ici c'est plus un aide-mémoire.
(temporaire, ensuite vous le connaîtrez par cœur, bien entendu !!)

Primitives des fonctions élémentaires :

Fonction	Primitive
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq 1)$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$
$x^\alpha \quad (\alpha \text{ non entier})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$e^{ax} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a}e^{ax}$

Formes usuelles de fonctions composées :

Fonction	Primitive
$u'(x) \cdot (u(x))^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$u'(x) \cdot e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$

1 Échauffement

Techniques de calcul

Exercice 1. Calculer par recherche directe de primitive les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (t^3 - 2t^2) dt \quad \int_0^{1/2} e^{-2x} dx \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt \quad \int_0^1 \frac{1}{3u+1} du \quad \int_0^1 x e^{-x^2} dx$$
$$\int_0^1 \frac{t^2}{t^3+1} dt \quad \int_1^2 \frac{3}{x^5} dx \quad \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^4} dx \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx \text{ (voir indication)}$$

Indication : On cherchera des réels a, b tels que, pour tout $x \notin \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$.

Exercice 2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 \ln(t) dt \quad \int_1^2 t \ln(t) dt \quad \int_0^1 x^2 e^x dx$$

Exercice 3. Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx \text{ (poser } u = 2x+1) \quad \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)+1}} dx \text{ (poser } u = \ln(x))$$

Fonctions dépendant d'intégrales

Exercice 4.

Soit G la fonction définie par :

$$G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

1. Donner l'ensemble de définition de G . Montrer que G est impaire.
2. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de G ; étudier les variations de G .
4. Soit $x \geq 0$. Encadrer (simplement !) e^{-t^2} pour $t \in [x, 2x]$. En déduire un encadrement de $G(x)$ sur $\mathbb{R}_+$; puis un encadrement de $G(x)$ sur $\mathbb{R}_-$.
5. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

Suites d'intégrales, majorations, limites

Exercice 5. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer I_0 .
2. En majorant la fonction intégrée, montrer que (I_n) converge vers 0.
3. Montrer que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
4. On pose $u_k = (-1)^k I_k$. Montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1})$.
5. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge, et que sa somme vaut $\ln(2)$.

2 Pour les enthousiastes

Techniques de calcul

Exercice 6. Calculer par recherche directe de primitive les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{x^2+3x+1}{x+1} dx \quad (\text{voir indication}) \quad \int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2} dx$$
$$\int_1^2 5^x dx \quad \int_0^5 |x^2-5x+6| dx \quad \int_1^2 (x-1)e^{x^2-2x+1} dx$$

Indication : chercher des réels c, d, e tels que, pour tout $x \neq -1$, $\frac{x^2+3x+1}{x+1} = cx + d + \frac{e}{x+1}$.

Exercice 7. Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 t^3 e^{-t^2} dt \quad (\text{intégrer } t \mapsto te^{-t^2})$$

Exercice 8. Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 \frac{1}{t+2\sqrt{t}} dt \quad (\text{poser } u = \sqrt{t}) \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{u \ln(u)} du \quad (\text{poser } t = \ln(u))$$

Exercice 9. Soit $f(x) = \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f , et son signe.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer : $\forall x \geq 0, f(x) \geq x\sqrt{1+x^4}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
4. Montrer que : $\forall t \geq 0, t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$.
5. En déduire un encadrement de f sur $\mathbb{R}_+$, puis un équivalent de f en $+\infty$.
6. En remarquant : $\forall t \geq 0, \sqrt{1+t^4} \geq 1$, obtenir une minoration de f . En déduire un équivalent de f en 0^+ .

Exercice 10. On note, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
2. Montrer, avec une intégration par parties, que $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire : $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Indications

1

2

3

4

5 1. Primitive usuelle.

2. Garder la dépendance en n pour envisager un théorème d'encadrement. Pas besoin d'être très subtil ensuite.

3. Regrouper la somme par linéarité.

4. Dans $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ remplacer $\frac{1}{k+1}$ par ce qui a été trouvé à la question précédente.

5. On a ses sommes partielles... qui ont une forme qui devrait vous sauter aux yeux. Ne reste plus qu'à passer à la limite.

6

•

• Soit je suis trop fatigué soit je me suis trompé dans l'énoncé car ça a pas l'air facile...

On peut écrire

$$\frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x+1)+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right)$$

et sous cette dernière forme ça se passe bien... en observant que $x-2$ est négatif sur l'intervalle d'intégration.

• $\exp(x \ln(5))$

• Étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$ sur l'intervalle d'intégration. Puis couper l'intégrale pour n'intégrer que sur les intervalle où le signe de $x^2 - 5x + 6$ est constant.

Remarque : **In n'existe aucune formule donnant une primitive d'une expression comportant une valeur absolue.**

•

7

8

9 1. Il s'agit donc de trouver les x tels que $\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$ soit bien définie. Pas d'intégrale impropre ici : il suffit que la fonction à intégrer soit continue sur l'intervalle d'intégration.

2. Il y aura un changement de variable $u = -t$

3. On minore la fonction à intégrer à l'aide d'une monotonie. Vérifier que les bornes sont dans le bon sens pour intégrer l'inégalité ! Pour la limite en $-\infty$ on peut utiliser la question précédente.

4. Justifier : $t^4 \leq 1 + t^4 \leq (1 + t^2)^2$

5. Intégrer l'encadrement ... on trouve $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7x^3}{3}$.

6. Intégrer cette fois $1 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1 + t^2$. on trouve $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

10 1. Dans la majoration, conserver le $\frac{1}{n!}$ et s'efforcer d'éjecter le reste pour obtenir une intégrale calculable.

2. Il faut passer de I_n à I_{n+1} donc augmenter la puissance du polynôme : on passera outre les recommandations officielles de mise en œuvre d'une IPP.

3. $\frac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$. Devinez ensuite comment on calcule la somme ! (et le faire proprement)