ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Intégrales impropres
Exercices

Exercice 1. Montrer que les intégrales suivantes convergent, et les calculer.

1. **Indispensables : (*)**

$$\int_0^{+\infty} e^{-t/4}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

2. **IPP et changements de variable :**

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t \ \ \textbf{(*)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(3x+2)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \ \ (\text{poser } u=e^t) \ \ \textbf{(*)}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ \ (\text{poser } u=\sqrt{t}) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x \ \ (n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2)$$

Exercice 2. Discuter la convergence des intégrales suivantes :

1. **Indispensables : (*)**

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x^{5/3}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \ \ (\lambda>0, n\in\mathbb{N}) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x \ \ (\lambda>0,\ n\in\mathbb{N})$$

2. **Plus difficile :**

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \ (\text{sans la calculer !}) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\big(\ln(t)\big)^n}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3. Soit $n\in\mathbb{N}$; on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n est convergente.
2. En posant $u=\dfrac{1}{t}$, calculer I_n.

Exercice 4. Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u$.

1. Trouver une relation de récurrence sur les I_n (l'existence a été montrée dans l'exercice 2)
2. En déduire : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = n!$.

Exercice 5 (Parités)**.**
Cet exercice contient des observations qui seront très utiles lors de l'étude de variables à densité.
Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que g est paire.
Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent aussi.
Montrer que dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. On suppose maintenant que g est impaire.
Montrer que si $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
Montrer que dans ce cas : $\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.
Que vaut alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$?

3. Soit f une fonction paire, continue sur $\mathbb{R}$; soit $n \in \mathbb{N}$.
Discuter en fonction de n la parité de la fonction : $t \mapsto t^n f(t)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En déduire que :
   - si n est impair, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$;
   - si n est pair, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 6. On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , on pose $\mathrm{I}_n = \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
   (b) En déduire que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.
3. (a) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k)$.
   (b) En sommant cette dernière inégalité, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$
   (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 7 (Moments de la loi normale)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a montré dans l'exercice 2 que l'intégrale $\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
On admet dans cet exercice que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer que si n est impair, alors $\mathrm{I}_n = 0$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2n} = 2\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2}\mathrm{I}_{2n}$.
4. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2n} = \sqrt{\pi}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}$.

Exercice 8. Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $x \leqslant y$, donner le signe de $f(x) - f(y)$. En déduire le sens de variation de f.

3. Pour $x > 0$, calculer $f(x) + f(x+1)$. En déduire : $\forall\, x > 0,\ \dfrac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$; puis les limites de f en 0 et $+\infty$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx}\, \mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.
   (b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n$.
   (c) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a: $\forall x \geqslant 0, f(x) = f(x)e^{-nx} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x e^{-kx}$. En déduire que :

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

2. On pose pour tout $u > 0$: $\mathrm{K}_u = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} + 1}\, \mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que, pour tout $u > 0$, l'intégrale K_u est convergente.
   (b) Exprimer K_u en fonction de K_1.
   (c) Montrer que $\mathrm{I}_0 - \mathrm{K}_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(2x)\, \mathrm{d}x$
   (d) Déduire des questions précédentes une relation simple entre I_0 et K_u pour $u > 0$.

Exercice 10. Soit $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\mathrm{H}(x)$ est défini pour $x > -1$.
2. (a) Montrer que pour $x \in]-1, 0]$, $\displaystyle\int_x^0 \frac{e^{-t}}{1+t}\, \mathrm{d}t \geqslant e^{-1} \times \ln(1+x)$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{x \to -1^+} \mathrm{H}(x) = +\infty$.
3. (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{H}(x) = 0$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1+t}\, \mathrm{d}t$ converge ; puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1+t}\, \mathrm{d}t \right) = 0$.
   (c) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n \mathrm{H}(x) = 0$.
4. Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$, et déterminer H'.
5. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{H}(x)\, \mathrm{d}x$ est convergente ; à l'aide d'une IPP, montrer que $\mathrm{I} = 1 - \mathrm{H}(0)$.

Indications

1
1. 4 ; 4 ; $\frac{1}{2}$; ln(2) (par recherche directe de primitive)
2. **Rappel : IPP et changements de variables se font en passant sur un segment** ($[0,\mathrm{A}]$ **ou** $[1,\mathrm{A}]$) **puis en faisant tendre** $\mathrm{A} \to +\infty$ **à la fin du calcul.**
   1 (IPP) ; $\frac{1}{6}$ (en posant $u = 3x+2$ mais peut aussi se aire par recherche directe)
   ln(2) (on retrouve une intégrale de la première section après changement de variable)
   1 (on retrouve une intégrale de la première section après changement de variable)

2 NB : je ne mentionne pas à chaque fois les continuités sur l'intervalle d'intégration, mais vous devez le faire.

- $\frac{1}{1+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$ converge (attention à la borne $\int_1$!!!) par Riemann donc on a la cv par comparaison de fonctions positives.
- $\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x^{5/3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4/3}}$
- $\frac{t}{e^t-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-t}$ puis test de Riemann
- Tests de Riemann pour les deux dernières.

Plus difficile :

- $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(1+t)}\right)$ permet de conclure à la divergence.
- test de Riemann
- Test de Riemann encore

3
1. $\frac{(t-1)^n}{t^{n+2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$;
2. Le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ donne :
$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{1/\mathrm{A}} (1-u)^n\,\mathrm{d}u$$
   On peut poser $v = 1-u$:
$$-\int_1^{1/\mathrm{A}} (1-u)^n\,\mathrm{d}u = \int_0^{1-1/\mathrm{A}} v^n\,\mathrm{d}v$$
   Pour $\mathrm{A} \to +\infty$ on obtient donc $\mathrm{I}_n = \int_0^1 v^n\,\mathrm{d}v = \frac{1}{n+1}$.

4
1. Une IPP (effectuée sur $\int_0^{\mathrm{A}}$; pour $\mathrm{A} \to +\infty$ les termes entre crochets tendent verts 0 par croissance comparée) donne $\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n$ (ou $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_{n-1}$ w suivant le calcul que vous choisissez de faire)
2. Récurrence.

7
1. Parité !!
2. Re-parité !!
3. Pour $\mathrm{A} \geqslant 0$ faire une IPP avec le produit $x^{2n+2}e^{-x^2} = \left(x^{2n+1}\right)\left(xe^{-x^2}\right)$; pour $\mathrm{A} \to +\infty$, par croissances comparées, et avec la convergence des intégrales en jeu, on trouvera
$$\int_0^{+\infty} x^{2n+2}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2n+1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
   Ensuite ... multiplier par 2 :)
4. Récurrence en se battant un peu avec des factorielles.

9
1. (a) Attention la continuité en 0 est à étudier !! La fonction à intégrer $\underset{x\to+\infty}{\sim} xe^{-(n+1)x}$: test de R.....
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$ permet de majorer la fonction à intégrer (mais contrôler à la main que cette majoration fonctionne encore en $x = 0$).
   (c) Pour $x > 0$ on peut par exemple partir de l'expression de la somme géométrique $\sum_{k=1}^{n} xe^{-kx}$ (de raison e^{-x}) ; et conclure
$$\sum_{k=1}^{n} xe^{-kx} = f(x)(1-e^{-nx})$$
   Vérifier ensuite que la formule demandée est encore valable en $x = 0$.
2. (a) La fct à intégrer $\underset{x\to+\infty}{\sim} xe^{-ux}$
   (b) Changement de variable $t = ux$
   (c) On regroupe par linéarité et identité remarquable au dénominateur.
   (d) $\mathrm{K}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{I}_0$ avec un changement de variable dans la question précédente ; puis on a K_u en fonction de K_1.