ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Variables aléatoires à densité
Exercices

Manipulations sur les lois à densité

Exercice 1.

1. Soit $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$.
   (a) Montrer que F_1 est la fonction de répartition d'une variable à densité X_1. Donner une densité de X_1.
   (b) Montrer l'existence, et calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $V(X_1)$ (on donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
   (c) Montrer que $\sqrt{X_1}$ est une variable à densité et reconnaître sa loi.
2. Soit la fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 3t^2 \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ 0 \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$.
   (a) Montrer que f_2 est une densité de probabilité.
   (b) On note X_2 une variable aléatoire de densité f_2 ; donner la fonction de répartition de X_2, notée F_2.
   (c) Montrer l'existence, et calculer $\mathbb{E}(X_2)$ et $V(X_2)$.
3. **(Loi de Gumbel)** Soit X_3 une variable de fonction de répartition $F_3 : x \mapsto 1 - \exp(-e^x)$.
   (a) Vérifier que F_3 possède bien les propriétés d'une fonction de répartition.
   (b) Montrer que X_3 est à densité ; en donner une densité.
4. **(Loi de Laplace)** Soit X_4 une variable aléatoire de fonction de répartition $F_4 : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-x}}{2} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.
   (a) Montrer que X_4 est à densité ; en donner une densité f_4.
   (b) Montrer l'existence, puis calculer $\mathbb{E}(X_4)$ et $V(X_4)$ (on pourra examiner la parité de f_4).
   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $|X_4|$.
5. **(Loi logistique)** Soit $F_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto \dfrac{1}{1 + e^{-t}}$.
   (a) Montrer que F_5 est la fonction de répartition d'une variable à densité. On note X_5 une telle variable.
   (b) Montrer que X_5 admet une densité paire. Montrer que X_5 admet une espérance, et la calculer.
6. Soit $f_6 : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{x^3} & \text{si } x \leqslant -1 \\ 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \dfrac{1}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.
   (a) Montrer que f_6 est une densité de probabilité.
   (b) Soit X_6 une variable aléatoire de densité f_6. Déterminer sa fonction de répartition.
   (c) Montrer que f_6 est impaire.
   (d) Discuter l'existence de $\mathbb{E}(X_6)$ et $V(X_6)$. Les calculer en cas d'existence.

(e) Déterminer la loi de la variable $(X_6)^2$.

Exercice 2 (Méthode d'inversion)**.** On reprend les variables de l'exercice précédent.
Dans tout ce qui suit, on note U une variable suivant $\mathscr{U}(]0,1[)$.

1. Soit $S = \sqrt{-\ln(1-U)}$. Montrer que S suit la même loi que X_1.
   En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_1.
2. Soit $T = U^{1/3}$. Montrer que T suit la même loi que X_2.
   En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_2.
3. Soit $V = \ln(-\ln(U))$. Montrer que V suit la même loi que X_3.
   En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_3.
4. Soit $W = \ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$. Montrer que W suit la même loi que X_5.
   En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_5.

Exercice 3. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme $\mathscr{U}([0,1])$.
On pose

$$U = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad V = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

1. Donner les fonctions de répartition de U et V.
2. Montrer que U et V sont des variables aléatoires à densité ; donner une densité pour chacune de ces deux variables.
3. Reprendre l'exercice en supposant que les X_i suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4 (Lois de fonctions de X)**.**
Dans les cas suivants, donner la loi de Y, montrer que Y est à densité, et en donner une densité.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, $Y = \sqrt{X}$.
2. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1,1])$, $Y = X^2$.
3. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1,1])$, $Y = |X|$.
4. $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, $Y = \ln(X)$.

Exercice 5 (d'après EML 1996)**.**

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} \text{ si } -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Déterminer le réel $\alpha > 0$ tel que f soit une densité de probabilité. On note alors X une variable aléatoire de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Soit $Y = |X|$. Donner la fonction de répartition de Y ; montrer que Y est à densité, et en donner une densité.

Exercice 6 (Lois de Pareto)**.**

1. Soit $g : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ \dfrac{3}{t^4} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$

   (a) Montrer que g est une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire de densité g.
   Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

   (b) Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$; les calculer en cas d'existence.

   (c) Soit $U \hookrightarrow \mathscr{E}(3)$. Montrer que $\exp(U)$ suit la même loi que X. En déduire, à l'aide de la fonction `rd.exponential`, un script Python permettant de simuler des tirages de X.

   (d) Retrouver l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ en calculant $\mathbb{E}(\exp(U))$, où U a été définie dans la question 1c.

2. Soit $c > 0$. On pose
$$g_c : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ \dfrac{c}{t^{c+1}} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer qu'ici aussi on a une densité ; déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y de densité g_c.

   (b) Discuter selon la valeur de c l'existence de $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$. Calculer ces quantités en cas d'existence.

   (c) Reprendre les questions (c) et (d) de l'item précédent avec $U \hookrightarrow \mathscr{E}(c)$.

3. Soient $(a, c) \in]0, +\infty[^2$ et
$$g_{a,c}(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x < a \\ c\dfrac{a^c}{x^{c+1}} \ \text{ si } \ x \geqslant a \end{cases}$$

   Soit Z une variable de densité $g_{a,c}$.

   (a) Montrer que g_c est une densité de la variable aléatoire $\dfrac{Z}{a}$.

   (b) À l'aide de cette dernière remarque, discuter selon les valeurs de a et c les existences de $\mathbb{E}(Z)$ et $V(Z)$; et donner leur valeur en cas d'existence.

   (c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $aU^{-1/c}$ suit la même loi que Z.

   (d) En déduire une fonction Python `pareto(a,c)` qui prend en arguments deux réels a et c strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire Z.

Exercices type concours

Exercice 7 (EDHEC 2021 un peu adapté)**.**

1. (a) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \ \text{ si } \ x > 0 \end{cases}$ peut être vue comme la fonction de répartition d'une variable Y à densité.
   Donner une densité de Y.

2. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

   On a déterminé dans l'exercice 6 (cas $c = 2$) la fonction de répartition de X ; cette fonction est
$$G : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

   On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$; on admet que M_n est une variable aléatoire à densité.

(a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

(b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

3. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. (a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

   (b) Calculer, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

NB : on dit que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de* Y.

Exercice 8 (EDHEC 2023)**.** On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Comme dans l'exercice 6 on montre que f est une densité de probabilité.
On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

On a vu que F est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$

1. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

   (a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X>t)}(X \leqslant tx)$.

   (b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

On cherche à examiner la réciproque de la propriété précédente.
On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y. Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1 , on a :

- $\mathbb{P}(Y > t) > 0$.
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y. On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Justifier que $G(1) = 0$.

3. (a) Établir l'égalité :

$$\forall x \geqslant 1, \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

   (b) Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

   (c) Montrer enfin la relation:

$$\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

4. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ qui, à tout réel t de $]1,+\infty[$, associe $y(t)$. On note (E_1) l'équation différentielle $y+\frac{t}{c}y'=0$ et (E_2) l'équation différentielle $y+\frac{t}{c}y'=1$. Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.
   (a) Soit z la fonction définie par $z(t)=t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1,+\infty[$.
   (b) En notant K la constante évoquée à la question 4a, donner toutes les solutions de (E_1).
   (c) Trouver une fonction u, constante sur $]1,+\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).
   (d) Montrer l'équivalence : h est solution de $(E_2) \Longleftrightarrow h-u$ est solution de (E_1).
   (e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t>1, \quad h(t)=1+\frac{K}{t^c}$$

5. (a) Montrer finalement que l'on a:

$$\forall t>1, \quad G(t)=1-\frac{1}{t^c}$$

   (b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1,+\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Exercice 9. Soient X et U deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, et U suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
Autrement dit, $\mathbb{P}(U=-1)=\mathbb{P}(U=1)=\frac{1}{2}$. *On dit que U est une variable de Rademacher.*
On définit $Y=UX$.

1. En utilisant la fonction `rd.normal`, programmer une fonction Python qui renvoie un tirage de la variable aléatoire Y.
2. Montrer : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y\leqslant x)=\frac{1}{2}\big(\mathbb{P}(X\leqslant x)+\mathbb{P}(X\geqslant -x)\big)$.
3. En déduire que Y suit la loi normale centrée réduite.
4. Calculer l'espérance de U ; en déduire que $\mathbb{E}(XY)=0$.
5. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.
6. (a) Rappeler la valeur de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$
   (b) Montrer, grâce à une intégration par parties que

$$\forall A\in\mathbb{R}_+, \quad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=-A^3 e^{-\frac{A^2}{2}}+3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

   (c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge et vaut $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.
   (d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}\left(X^4\right)=3$
7. (a) Vérifier que $\mathbb{E}\left(X^2Y^2\right)=3$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Cov}\left(X^2,Y^2\right)$.
   (c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

Exercice 10.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(1)$. On pose

$$Y = \lfloor X \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad Z = X - \lfloor X \rfloor$$

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Reconnaître la loi de Y, et calculer son espérance.
3. Déterminer $Z(\Omega)$.
4. Soit $t \in [0,1[$. Montrer : $\mathbb{P}(Z \leqslant t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (F_X(k+t) - F_X(k))$. En déduire la fonction de répartition de Z ; montrer que Z est à densité, et en donner une densité.

Exercice 11 (EML 2001)**.** 1. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t} t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{t \to +\infty} t^2 f_n(t) = 0$.
   En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente.

   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0;+\infty[, \quad \int_0^x f_n(t)\,dt = -\dfrac{e^{-x} x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt.$

   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1.$

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2. Pour tout entier naturel n, on définit la variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ vérifient:

   $$E(X_n) = n+1 \quad V(X_n) = n+1$$

   (b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes:

   $$\int_0^4 f_4(t)\,dt \simeq 0,37 \quad \int_0^6 f_4(t)\,dt \simeq 0,71 \quad \int_0^8 f_4(t)\,dt \simeq 0,90$$

   Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4.
   Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $P(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $P(4 < X_4 \leqslant 8)$.

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t.
   On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

   (a) Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t.
   Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, égale à l'instant d'arrivée de la n-ième voiture au péage à partir de l'instant 0 .

   (b) Soient $t \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Justifier l'égalité de l'événement $(Z_n \leqslant t)$ et de l'événement $(Y_t \geqslant n)$.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n.

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.

Quelques compléments sur la loi normale

Exercice 12. Soient X_1 et X_2 indépendantes ; on suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Rappeler les densités de X_1 et X_2.
2. Donner la loi de la variable $X_1 - X_2$.
3. On cherche à calculer $\mathbb{P}(X_1 \leqslant X_2)$.
   Soit
   $$U = \frac{X_1 - X_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$
   Montrer que $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Exprimer l'événement $(X_1 \leqslant X_2)$ en fonction de U ; en déduire que
   $$\mathbb{P}(X_1 \leqslant X_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - m_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$$

Exercice 13 (Loi log-normale)**.** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = \exp(X)$.

1. Exprimer la fonction de répartition de Y à l'aide de la fonction Φ.
2. Déterminer une densité de Y.
3. Généraliser les deux questions précédentes à $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$ quelconques.

Exercice 14. Soit $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $X = N + |N|$, et $Y = N|N|$.

1. Déterminer l'espérance de Y.
2. Montrer que Y admet une variance. Calculer $\mathbb{E}(Y^2)$ à l'aide d'une IPP (en intégrant $xe^{-x^2/2}$) ; puis $V(Y)$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(N \leqslant 0) = \dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ pour $x < 0$.
5. Soit $x > 0$. En utilisant le SCE $\{(N > 0), (N \leqslant 0)\}$, montrer que
   $$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(0 < N \leqslant \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}$$
   En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \Phi\left(\dfrac{x}{2}\right)$, où on a noté Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
6. La variable X est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

Indications

8 1. (a) $\mathbb{P}_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \dfrac{\mathbb{P}((t<X)\cap(X\leqslant tx))}{\mathbb{P}(X>t)}$. La proba au numérateur peut être nulle (événements incompatibles) ou s'exprimer à l'aide de F.
Pour $x \geqslant 1$ on trouve $\mathbb{P}_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \dfrac{F(tx)-F(t)}{1-F(t)}$.

(b) Par loi conditionnelle on entend la donnée de $\mathbb{P}_{(X>t)}\left(\dfrac{X}{t} \leqslant x\right)$ pour x réel **quelconque** : ne pas oublier des cas !

NB ici l'énoncé est incorrect : on ne peut pas demander la densité continue sur $[1,+\infty[$ (crochet fermé) et obtenir une Pareto.
On peut soit demander continuité sur $]1,+\infty[$ et continuité à droite en 1, ou (de manière équivalente) que la restriction de g à $[1,+\infty[$ soit continue.

2. g nulle sur $]-\infty,1[$.
3. (a)
   (b) G $\mathscr{C}^1$ car g continue (cours). On dérive par rapport à ... quelle variable ?
   (c) $G' = g$ sur $]1,+\infty[$; donc $g(x) = \dfrac{tG'(tx)}{1-G(t)}$ pour $x>1$. On fait tendre $x \to 1^+$ et on utilise les continuités de g (à droite) et G.
4. (a) Établir $z'(t) = ct^{c-1}\left(y(t) + \dfrac{t}{c}y'(t)\right)$. Comme $ct^{c-1} \neq 0$ sur $]1,+\infty[$, on a

$$(\forall\, t>1,\ z'=0) \Leftrightarrow (\forall\, t>1,\ y(t)+\frac{t}{c}y'(t))$$

   (b) Maintenir les équivalences !! y sol de (E_1) ssi $z = K$ constante ssi $y(t) = \dfrac{K}{t^c}$: on a bien TOUTES les solutions.
   (c) Injecter $y(t) = \alpha$ dans (E_2). On trouve $\alpha = 1$.
   (d) Double implication : maintenir un nombre suffisant de $\forall\, t>1$ pour être rigoureux.
   (e) Conclusion directe des deux questions précédentes.
5. (a) On a trouvé une infinité de solutions à (E_2) (normal). Si on demande une unicité, il faut imposer une condition initiale. En trouver une vérifiée par G.
   (b)

11 1. (a) RAS... mais le faire proprement !!
   (b)
   (c)
   (d)
2. (a) Ne pas oublier de parler de l'existence de l'espérance et de la variance.
   (b) Reconnaître (et justifier) qu'on a là des valeurs approchées de $F_4(4)$, $F_4(6)$, $F_4(8)$. Ensuite il suffit de faire passer par ces points une courbe qui vérifie les bonnes propriétés : penser à la valeur en 0, à la monotonie, à la limite en $+\infty$.
   Les valeurs approchées deux deux probas demandées s'expriment en fonction de $F_4(4)$ et $F_4(8)$.
3. Pour tout réel $t>0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t.
On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t.
   (a)
   (b) Ces deux événements traduisent le fait que la n-ième voiture arrive à un instant supérieur ou égal à t... car à ce moment-là que peut-on dire du nombre de voitures étant arrivées entre les instants 0 et t ?
   (c) Reprendre l'expression de la loi de Poisson : $P(Z_n \leqslant t) = 1 - P(Y_t \leqslant n-1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t}\dfrac{t^k}{k!}$.
   (d) Régularité... notamment continuité en 0. Ensuite on peut dériver pour obtenir une densité. Isoler le terme $k=0$; puis la dérivée de $\sum_{k=1}^{n-1}[...]$ se téléscope !

13 1. Noter que Y est à valeurs >0. On trouve

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \Phi(\ln(x)) \text{ si } x>0 \end{cases}$$

2. Montrer d'abord que cette densité existe : la continuité de F en 0 est à détailler. Ensuite on dérive $x \mapsto \Phi(\ln(x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on se souvient que $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.
3. Calculs similaires ; montrer d'abord que la fonction de répartition de X est $x \mapsto \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.