ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Devoir surveillé n°4
(sans l'erreur d'énoncé)
8/02/2025
Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Si aucune question d'informatique de l'exercice 2 n'est traitée sérieusement, un malus de 1 pt sera appliqué à la note finale.

Exercice 1

Partie I. Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} \text{ si } x>0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Écrire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 1, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0,+\infty[$.
2. Déduire du même développement limité que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :
$$\forall x>0,\ f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$
4. Étudier les variations de φ. En déduire le tableau de variation de f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

5. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$u_n \geqslant \frac{1}{e}\ln(n+1)$$
Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
7. Montrer : $\forall x\in[0,1],\ n\dfrac{1-e^{-x}}{1+nx} \leqslant f(x)$.
8. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$0 \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u - u_n \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
9. Donner alors un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

PARTIE A: Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V. On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$.

1. (a) Justifier : $\forall t \in [0, +\infty[, \ 0 \leqslant F_U(t) f_V(t) \leqslant f_V(t)$.

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) \mathrm{d}t$ converge.

   On admet le résultat suivant :

$$\mathbb{P}([U \leqslant V]) = \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) \mathrm{d}t$$

2. En déduire: $\displaystyle\mathbb{P}([U > V]) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t) \mathrm{d}t$.

3. Exemple : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

   (a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

   (b) En déduire: $\mathbb{P}([U > V]) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ. On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

   (a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}([M_n > t])$.

   (b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
   Reconnaître la loi de M_n et préciser son (ses) paramètre(s).

5. (a) Montrer : $\mathbb{P}([N = 1]) = \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Justifier: $\forall n \in \mathbb{N}^*, [N > n] = [M_n > T_0]$.
   En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}([N > n])$ en fonction de n.

   (c) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}, \ \mathbb{P}([N = n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([N = 0])$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

7. Informatique.
   En Python, après l'import

```
import numpy.random as rd
```

   la commande `rd.exponential(a)` renvoie un tirage d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

   (a) Compléter la fonction suivante, qui simule la variable aléatoire N décrite ci-dessus :

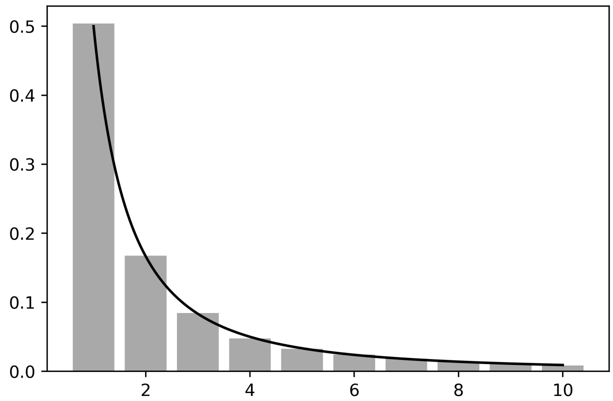
```python
def tirage_N(la): # ici "la" est le paramètre lambda de la loi exp.
    T0 = rd.exponential(...)
    N = ...
    while ...
        N = N+1
    return N
```

(b) On exécute alors les instructions

```python
L1 = np.zeros(10)
for k in range(10000):
    n = tirage_N(1)
    if n<=10:
        L1[n-1] = L1[n-1] + 1
freq = L1/10000

plt.bar(range(1,11),freq,color="darkgrey")
X =  np.linspace(1,10,1000)
plt.plot(X,1/(X*(X+1)),color='black')
plt.show()
```

et on obtient la figure :



Expliquer ce que fait ce code, et en quoi il illustre un résultat obtenu dans les questions précédentes.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(x))^n}{x^2}.$$

et on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

   (b) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

   (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.

   (d) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n$$

   (e) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = n!$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{n!}\, g_n(x) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité.
On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

(b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

(c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 1$ et $n \in \mathbb{N}$?

(d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 1$.

(e) Soit $x \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(x))^k}{x} + F_{k-1}(x)$$

(f) En déduire : $\forall\, x \geqslant 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\ln(x)^k}{x}$.

(g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(X_n)$.

(a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

(b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

(c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

(d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(e^x).$$

(e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n. Quelle loi suit Y_0 ?

(f) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_0 admet un moment d'ordre k, et que $E\left(Y_0^k\right) = k!$.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}\,dt$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.

2. Calculer u_0 et u_1.

3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ln(2)$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   (c) Donner la limite de la suite (u_n).

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

   (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.

   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n-1}$.

   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.