Devoir surveillé n°4
Corrigé

Exercice 1

Partie I. Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. **Écrire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 1, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0,+\infty[$.**

   Pour $x \to 0$ on a aussi $-x \to 0$, et donc

   $$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

   ce qui donne $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$ au voisinage de 0.

   f est continue sur $]0,+\infty[$ comme composée de fonctions continues ; et de plus avec le DL précédent $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ ce qui donne la continuité en 0.

   Finalement f est bien continue sur $[0,+\infty[$.

2. **Déduire du même développement limité que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$.**

   Le taux de variation en 0 s'écrit

   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1-\frac{x}{2}+o(x)-1}{x} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

   et donc $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{1}{2}$.

3. **Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :**

   $$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

   Sur $]0,+\infty[$, f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition.

   Le calcul de la dérivée donne :

   $$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{e^{-x}\times x - (1-e^{-x})\times 1}{x^2} = \frac{(1+x)e^{-x}-1}{x^2}$$

   ce qui donne $\varphi(x) = (1+x)e^{-x} - 1$.

4. **Étudier les variations de φ. En déduire le tableau de variation de f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.**

   Cette fonction φ est à son tour dérivable sur $\mathbb{R}_+$; et

   $$\forall x \geqslant 0,\ \varphi'(x) = e^{-x} + (1+x)(-e^{-x}) = -xe^{-x} \leqslant 0$$

   donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que φ est négative sur $\mathbb{R}_+$; ainsi $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$ est négative pour tout $x > 0$ (car le dénominateur x^2 est > 0). De plus $f'(0) = -\dfrac{1}{2} \leqslant 0$; de sorte que finalement :

$$f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+.$$

En $+\infty$, $e^{-x} \to 0$ et $x \to +\infty$ donc $f(x) \to 0$ par quotient.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	1 $\searrow$	0

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

5. **Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :**

$$u_n \geqslant \frac{1}{e}\ln(n+1)$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Il s'agit de minorer la fonction à intégrer.
Soit $n > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall\, u \in [0,n],\ 0 \leqslant u \leqslant n\quad & \\
&\Rightarrow -1 \leqslant -\frac{u}{n} \leqslant 0 \\
&\Rightarrow e^{-1} \leqslant e^{-u/n} \leqslant 1 \\
&\Rightarrow \frac{e^{-1}}{1+u} \leqslant \frac{e^{-u/n}}{1+u} \leqslant \frac{1}{1+u} \quad \text{en divisant par } 1+u>0
\end{aligned}$$

et on obtient en particulier :

$$\forall\, u \in [0,n],\ \frac{e^{-u/n}}{1+u} \geqslant \frac{e^{-1}}{1+u}$$

d'où en intégrant sur $[0,n]$:

$$\int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u \geqslant \int_0^n \frac{e^{-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u = e^{-1}\int_0^n \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = e^{-1}\Big[\ln(1+u)\Big]_0^n = e^{-1}\ln(n+1)$$

ce qui donne le résultat voulu.

6. **Prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.**

D'après la question 1, f est continue sur $[0,1]$ (**crochets fermés !**) donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.

7. **Montrer : $\forall\, x \in [0,1],\ n\dfrac{1-e^{-x}}{1+nx} \leqslant f(x)$.**

Pour $x \in]0,1]$ on utilise l'expression de $f(x)$: $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$.
Avec $1+nx \geqslant nx$ on a :

$$\forall\, x \in]0,1],\ n\frac{1-e^{-x}}{1+nx} \leqslant n\frac{1-e^{-x}}{nx} = \frac{1-e^{-x}}{x} = f(x)$$

Pour $x=0$: $n\dfrac{1-e^{-0}}{1+n\times 0} = 0$ et $f(0)=1$; $0 \leqslant 1$ donc l'inégalité est encore vraie.

8. **Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :**

$$0 \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u - u_n \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Examinons le terme central de cet encadrement :

$$\int_0^n \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u - u_n = \int_0^n \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u - \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_0^n \frac{1-e^{-u/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

Comme $u \geqslant 0$ sur le domaine d'intégration, on a $e^{-u/n} \leqslant 1$; et donc $\forall\, u \in [0,n],\ \dfrac{1-e^{-u/n}}{1+u} \geqslant 0$.
D'où par positivité de l'intégrale (les bornes sont bien dans l'ordre croissant) :

$$\int_0^n \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u - u_n = \int_0^n \frac{1-e^{-u/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u \geqslant 0$$

On pose maintenant $x = \dfrac{u}{n}$ dans l'intégrale. Alors $u = nx$ et $\mathrm{d}u = n\mathrm{d}x$.

$$\int_0^n \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u - u_n = \int_0^n \frac{1-e^{-x/n}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{1+nx}\,n\mathrm{d}x = \int_0^1 n\frac{1-e^{-x}}{1+nx}\mathrm{d}x$$

On reconnaît dans cette dernière quantité le majorant de la question précédente. Comme :

$$\forall\, x \in [0,1],\ n\frac{1-e^{-x}}{1+nx} \leqslant f(x)$$

on a en intégrant sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 n\frac{1-e^{-x}}{1+nx}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

On a donc finalement montré :

$$\int_0^n \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u - u_n = n\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{1+nx}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui donne l'autre inégalité de l'encadrement.

9. **Donner alors un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.**
En calculant l'intégrale, l'encadrement montré dans la question précédente s'écrit :

$$0 \leqslant \ln(1+n) - u_n \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}$$

On note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$: I est un nombre constant !
On divise alors cet encadrement par $\ln(n+1)$ (>0 dès que $n \geqslant 1$) :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ 0 \leqslant 1 - \frac{u_n}{\ln(1+n)} \leqslant \frac{\mathrm{I}}{\ln(1+n)}$$

et on voit par le théorème des gendarmes que
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{u_n}{\ln(1+n)} = 0$; ce qui s'écrit aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(1+n)} = 1$; et donc finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

(dernier équivalent à démontrer par vos soins...)

Exercice 2

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

PARTIE A: Des résultats préliminaires

Soient U **et** V **deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives** f_U **et** f_V **et de fonctions de répartition respectives** F_U **et** F_V**. On suppose que les fonctions** f_U **et** f_V **sont nulles sur** $]-\infty,0[$ **et continues sur** $[0,+\infty[$**.**

1. (a) **Justifier :** $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t) f_V(t) \leqslant f_V(t)$ **.**

   Une fonction de répartition étant à valeurs dans $[0,1]$ on a :

   $$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, 0 \leqslant F_U(t) \leqslant 1$$

   d'où le résultat en multipliant par $f_v(t) \geqslant 0$.

   (b) **En déduire que l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) \mathrm{d}t$ **converge.**

   f_V est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après l'énoncé ; et F_U l'est comme fonction de répartition d'une variable <u>à densité</u>.
   Ainsi $t \longmapsto F_U(t) f_V(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc d'après la question précédente et par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) \mathrm{d}t$ converge.

   On admet le résultat suivant :

   $$\mathbb{P}([U \leqslant V]) = \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) \mathrm{d}t$$

2. **En déduire:** $\mathbb{P}([U > V]) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))\, f_V(t) \mathrm{d}t$.

   On commence par passer au complémentaire :

   $$\mathbb{P}([U > V]) = 1 - \mathbb{P}([U \leqslant V]) = 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) \mathrm{d}t$$

   On observe ensuite que

   $$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_V(t)\,\mathrm{d}t$$

   car f_V est une densité, nulle sur $\mathbb{R}_-$.
   Finalement

   $$\mathbb{P}([U > V]) = 1 - \mathbb{P}([U \leqslant V]) = \int_0^{+\infty} f_V(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))\, f_V(t) \mathrm{d}t$$

3. **Exemple : Soient** $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$**. On suppose dans cette question que** U **suit la loi exponentielle de paramètre** λ **et que** V **suit la loi exponentielle de paramètre** μ**.**

   (a) **Rappeler, pour tout** t **de** $\mathbb{R}^+$**, une expression de** $F_U(t)$ **et de** $f_V(t)$**.**

   Cours (on demande les expressions sur $\mathbb{R}_+$) :

   $$\forall\, t \geqslant 0,\ F_U(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad f_V(t) = \mu e^{-\mu t}$$

   (b) **En déduire:** $\mathbb{P}([U > V]) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$**.**

   Pour les lois exponentielles, f_U et f_V sont bien nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0,+\infty[$.
   On peut alors appliquer la question 2, et on calcule l'intégrale déterminée précédemment :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}([U > V]) &= \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))\, f_V(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} \mathrm{d}t \\ &= \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

et on peut utiliser une intégrale usuelle : l'intégrale de la densité de $\mathscr{E}(\lambda+\mu)$ valant 1, on a

$$\int_0^{+\infty}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}\,\mathrm{d}t=1$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda+\mu)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda+\mu}$$

et enfin

$$\mathbb{P}([\mathrm{U}>\mathrm{V}])=\mu\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda+\mu)t}\mathrm{d}t=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$. On considère une suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{T}_k\leqslant\mathrm{T}_0$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

4. **Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $\mathrm{M}_n=\min(\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n)$.**

(a) **Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}([\mathrm{M}_n>t])$.**

Vu en TD, loi de l'inf de n variables exponentielles :

$$\forall\, t\geqslant 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{M}_n>t)=e^{-n\lambda t}$$

(b) **En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.**
Reconnaître la loi de M_n et préciser son (ses) paramètre(s).
M_n est le min de n valeurs positives (tirages de $\mathrm{X}\hookrightarrow\mathscr{E}(\lambda)$) doc M_n est à valeurs positives. On en déduit $\forall\, t<0$, $\mathbb{P}(\mathrm{M}_n\leqslant t)=0$.
De plus, $\forall\, t\geqslant 0$, $\mathbb{P}(\mathrm{M}_n\leqslant t)=1-\mathbb{P}(\mathrm{M}_n>t)=1-e^{-n\lambda t}$ Finalement la fonction de répartition de M_n est

$$\mathrm{F}_n : t\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } t<0\\ 1-e^{-n\lambda t} \text{ si } t\geqslant 0\end{cases}$$

et on reconnaît bien sûr $\mathrm{M}_n\hookrightarrow\mathscr{E}(n\lambda)$.

5. (a) **Montrer : $\mathbb{P}([\mathrm{N}=1])=\mathbb{P}([\mathrm{T}_1\leqslant\mathrm{T}_0])=\dfrac{1}{2}$.**

D'après les définitions, on a N = 1 ssi le plus petit entier $k>0$ tel que $\mathrm{T}_k\leqslant\mathrm{T}_0$ est $k=1$; donc ssi $\mathrm{T}_1\leqslant\mathrm{T}_0$.
On a bien $\mathbb{P}([\mathrm{N}=1])=\mathbb{P}([\mathrm{T}_1\leqslant\mathrm{T}_0])$.
T_0 et T_1 sont indépendantes et suivent des lois exponentielles ; la dernière question de la partie I s'applique donc avec $\lambda=\mu$ et on trouve

$$\mathbb{P}([\mathrm{N}=1])=\mathbb{P}([\mathrm{T}_1\leqslant\mathrm{T}_0])=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda}=\frac{1}{2}$$

(b) **Justifier: $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, [\mathrm{N}>n]=[\mathrm{M}_n>\mathrm{T}_0]$.**
En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}([\mathrm{N}>n])$ en fonction de n.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $[\mathrm{N}>n]$ ssi le premier entier $k>0$ tel que $\mathrm{T}_k\leqslant\mathrm{T}_0$ est $>n$; donc ssi $\mathrm{T}_1>\mathrm{T}_0$, $\mathrm{T}_2>\mathrm{T}_0$,..., $\mathrm{T}_n>\mathrm{T}_0$; donc <u>ssi</u> le plus petit des nombres $\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n$ est $>\mathrm{T}_0$ (observation usuelle quand on calcule la loi du min).
Autrement dit :

$$(\mathrm{N}>n)=\bigcap_{k=1}^{n}(\mathrm{T}_k>\mathrm{T}_0)=\big(\min(\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n)>\mathrm{T}_0\big)=(\mathrm{M}_n>\mathrm{T}_0)$$

(c) **Montrer alors : $\forall\, n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\mathbb{P}([\mathrm{N}=n])=\dfrac{1}{n(n+1)}$.**

Les variables $\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n$ sont indépendantes, suivent $\mathscr{E}(\lambda)$, donc on a vu que $\mathrm{M}_n\hookrightarrow\mathscr{E}(n\lambda)$.

De plus, les variables $T_0, T_1, ..., T_n$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions $M_n = \min(T_1, ..., T_n)$ et T_0 sont indépendantes.

D'après la partie 1, avec $M_n \hookrightarrow \mathscr{E}(n\lambda)$ et $T_0 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(N > n) = \mathbb{P}(M_n > T_0) = \frac{\lambda}{n\lambda + \lambda} = \frac{1}{n+1}$$

puis classiquement, pour tout $n \geqslant 2$, et comme alors n et $n-1$ sont dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(N > n-1) - \mathbb{P}(N > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

(d) **En déduire la valeur de $\mathbb{P}([N = 0])$.**

On observe que cette dernière formule s'étend à $n = 1$ d'après la question 5a.
Par définition de N, $N(\Omega) = \mathbb{N}$ donc

$$\mathbb{P}(N = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Or, si $M \in \mathbb{N}^*$, un téléscopage donne :

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{M} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{M+1}$$

et pour $M \to +\infty$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

et donc $P(N = 0) = 0$.

6. **La variable aléatoire N admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.**

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|n\mathbb{P}(N = n)| = \dfrac{1}{n+1}$ donc $|n\mathbb{P}(N = n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc par comparaison de SATP $\sum n\mathbb{P}(N = n)$ ne converge pas absolument : N n'admet pas d'espérance.

7. **Informatique.**
En Python, après l'import

```
import numpy.random as rd
```

la commande `rd.exponential(a)` renvoie un tirage d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

(a) **Compléter la fonction suivante, qui simule la variable aléatoire N décrite ci-dessus :**

On peut écrire :

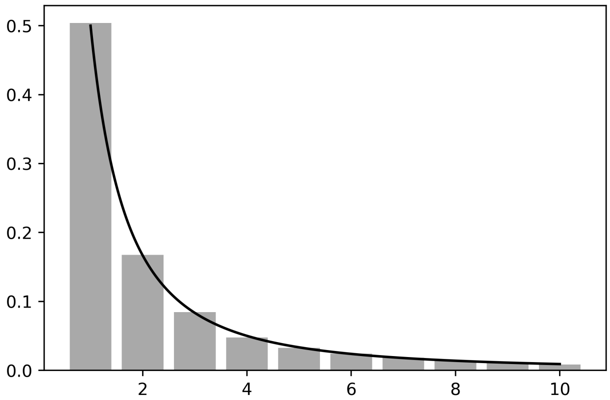
```
def tirage_N(la): # ici "la" est le paramètre lambda de la loi exp.
    T0 = rd.exponential(1/la)
    N = 1
    while rd.exponential(1/la)>T0:
        N = N+1
    return N
```

On effectue des tirages d'une variable de La loi exponentielle λ par `rd.exponential(1/la)`.
Ensuite, on commence par tirer une valeur de T_0, puis on effectue des tirages successifs de variables suivant cette même loi jusqu'à obtenir une valeur inférieure à T_0 (et donc on continue tant que la valeur tirée est $> T_0$).
N compte le nombre de tirages nécessaires.

(b) **On exécute alors les instructions suivantes :**

```
1  L1 = np.zeros(10)
2  for k in range(10000):
3      n = tirage_N(1)
4      if n<=10:
5          L1[n-1] = L1[n-1] + 1
6  freq = L1/10000
7
8  plt.bar(range(1,11),freq,color="darkgrey")
9  X =  np.linspace(1,10,1000)
10 plt.plot(X,1/(X*(X+1)),color='black')
11 plt.show()
```

et on obtient la figure :



Expliquer ce que fait ce code, et en quoi il illustre un résultat obtenu dans les questions précédentes.

Ce code initialise une liste L_1 dont les composantes comptent le nombre d'apparitions de $\mathrm{N} = 1$, $\mathrm{N} = 2$, ..., $\mathrm{N} = 10$ sur 10000 tirages de N. En divisant par 10000 on obtient alors une approximation des $\mathbb{P}(\mathrm{N} = i)$ pour $i \in [\![1, 10]\!]$. Ces probas sont représentées par les barres.

Ensuite on y superpose la courbe représentative de $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$ (lignes 9 et 10) et on observe que les barres s'alignent bien sur la courbe.

Ceci illustre donc que pour $n \in [\![1, 10]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(x))^n}{x^2}.$$

et on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. (a) **Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:**

$$g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Calculons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} g_n(x)$:

$x^{3/2} g_n(x) = \dfrac{\ln(x)^n}{\sqrt{x}}$ et cette dernière expression tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées ; ce qui donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} g_n(x) = 0$ et donc $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

(b) **Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.**

$\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Soit $\mathrm{A} \geqslant 1$: on a

$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\mathrm{A}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{A}} \xrightarrow{\mathrm{A}\to+\infty} 1$$

donc I_0 converge, et $\mathrm{I}_0 = 1$.

(c) **Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.**

$\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$. La fonction g_n est continue sur $[1,+\infty[$; de plus on a vu que $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Par critère de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

(d) **À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n$$

On se place sur $[1, \mathrm{A}]$ avec $\mathrm{A} \geqslant 1$.

$$\int_1^{\mathrm{A}} g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{A}} \frac{(\ln(t)^{n+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On peut dériver $t \mapsto \ln(t)^{n+1}$ en $t \mapsto (n+1)\dfrac{1}{t}(\ln(t))^n$; et intégrer $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ en $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$.
Toutes ces fonctions sont $\mathscr{C}^1$ donc l'IPP est légitime ; et on a

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{A}} \frac{(\ln(t)^{n+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{t}\ln(t)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{A}} + \int_1^{\mathrm{A}} \frac{1}{t}n\frac{1}{t}(\ln(t))^n\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(\mathrm{A})^{n+1}}{\mathrm{A}} + (n+1)\int_1^{\mathrm{A}} \frac{(\ln(t))^n}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En faisant tendre $\mathrm{A} \to +\infty$, $\dfrac{\ln(\mathrm{A})^{n+1}}{\mathrm{A}} \to 0$ et on obtient bien

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t)^{n+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(on a vu que ces intégrales convergeaient) ce qui est l'égalité demandée.

(e) **En déduire que :**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = n!$$

C'est évidemment une récurrence.

- $\mathrm{I}_0 = 1 = 0!$ (vu en question 1b)
- Si $\mathrm{I}_n = n!$, alors $\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n = (n+1)n! = (n+1)!$; d'où l'hérédité.

La propriété est bien établie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{n!}g_n(x) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.**

3 propriétés :

- $0 \geqslant 0$, g_n est positive sur $[1,+\infty[$ donc $\dfrac{1}{n!}g_n(x) \geqslant 0$ sur $[1,+\infty[$; ainsi f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
- g_n étant continue sur $\mathbb{R}_+$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_1^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{I}_n}{n!} = 1$

f_n est donc bien une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

(b) **La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?**

On examine la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,\mathrm{d}x$ donc la convergence de $\int_{1}^{+\infty} x g_n(x)\,\mathrm{d}x$ (la quantité à intégrer étant positive sur $[1,+\infty[$ on peut omettre la valeur absolue).
On a l'équivalent :

$$x g_n(x) = \frac{x}{x^2}\ln(x)^n = \frac{\ln(x)^n}{x}$$

et pour $x \geqslant 3$, $\frac{\ln(x)^n}{x} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant 0$.
Ainsi, l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{\ln(x)^n}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge par comparaison à une intégrale de Riemann divergente ; et par équivalence de fonctions positives $\int_3^{+\infty} x g_n(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, et donc $\int_1^{+\infty} x g_n(x)\,\mathrm{d}x$ aussi.
Ainsi, X_n n'admet pas d'espérance.

(c) **Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 1$ et $n \in \mathbb{N}$?**

On sait que $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Si $x < 1$, f_n est nulle sur $]-\infty, x]$ et donc $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

(d) **Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 1$.**

$F_0(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x g_0(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{x}$.

(e) **Soit $x \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :**

$$F_k(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(x))^k}{x} + F_{k-1}(x)$$

C'est une IPP similaire à celle de la question 1d.

$$\begin{aligned}
F_k(x) = \int_{-\infty}^{x} f_k(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{k!}\int_1^x \frac{\ln(t)^k}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{k!}\left(\left[-\frac{1}{t}\ln(t)^k\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t}k\frac{1}{t}(\ln(t))^{k-1}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{k!}\frac{\ln(x)^k}{x} + \frac{k}{k!}\int_1^x \frac{(\ln(t))^{k-1}}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k!}\frac{\ln(x)^k}{x} + \frac{1}{(k-1)!}\int_1^x \frac{(\ln(t))^{k-1}}{t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et on reconnaît bien

$$F_k(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x)$$

(f) **En déduire : $\forall x \geqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\ln(x)^k}{x}$.**

On peut procéder par récurrence avec $\mathscr{P}(n)$: « $\forall x \geqslant 1,\ F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\ln(x)^k}{x}$ » ; ou faire un télescopage : la question précédente montre que

$$\forall, k \in \mathbb{N}^*,\ F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(x))^k}{x}$$

et on peut sommer cela de $k = 1$ à n (avec $n \geqslant 1$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{F}_k(x) - \mathrm{F}_{k-1}(x)\right) &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(\ln(x))^k}{1+x} \\
\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_0(x) &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(\ln(x))^k}{x} \\
\mathrm{F}_n(x) &= \mathrm{F}_0(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(\ln(x))^k}{x}
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{F}_0(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et on reconnaît dans cette seconde partie le terme $k = 0$ de la somme : donc

$$\mathrm{F}_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(\ln(x))^k}{x}$$

Enfin pour $n = 0$ on cherche à montrer $\mathrm{F}_0(x) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} \frac{(\ln(x))^k}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ ce qui est bel et bien vérifié.

(g) **Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $\mathrm{F}_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.**

Pour $x < 1$, $\mathrm{F}_n(x) = 0 \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.
Pour $x \geqslant 1$, on reconnaît une série exponentielle !

$$\mathrm{F}_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(\ln(x))^k}{x} \xrightarrow{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(x))^k}{k!} = 1 - \frac{1}{x} \exp(\ln(x)) = 1 - \frac{x}{x} = 0$$

Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{F}_n(x) = 0$$

3. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{Y}_n = \ln(\mathrm{X}_n)$.**

(a) **Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?**

X_n admet pour densité f_n nulle sur $]-\infty, 1[$, ce qui montre que X_n est à valeurs dans $[1, +\infty[$; dès lors la quantité $\ln(\mathrm{X}_n)$ est bien définie.
De plus si X_n est à valeurs dans $[1, +\infty[$, alors $\mathrm{Y}_n = \ln(\mathrm{X}_n)$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$.

(b) **Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.**

On passe par le théorème de transfert ; on s'intéresse donc à l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \ln(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

dont on examine la convergence (absolue, mais la quantité intégrée est positive).

$$\int_1^{+\infty} \ln(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \int_1^{+\infty} \ln(x) g_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)^{n+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

et on reconnaît dans cette dernière intégrale I_{n+1} qui converge bien.
On a alors :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = \int_1^{+\infty} \ln(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \mathrm{I}_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

(c) **Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.**

C'est assez similaire : le moment d'ordre 2 de Y_n est donné par l'intégrale (dont on a aussi vu la convergence) :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n^2) = \int_1^{+\infty} (\ln(x))^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \mathrm{I}_{n+2} = \frac{(n+2)!}{n!} = n(n+1)$$

Et on en déduit avec KH

$$\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n^2) - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n)^2 = n^2(n+1)^2 - (n+1)^2 = (n+1)^2(n^2-1)$$

(d) **On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}_n(x) = \mathrm{F}_n(e^x).$$

On passe par la fonction de répartition :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant x) &= \mathbb{P}(\ln(\mathrm{X}_n) \leqslant x)\\ &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_n \leqslant e^x) \quad \text{stricte croissance d'exp sur } \mathbb{R}\\ &= \mathrm{F}_n(e^x)\end{aligned}$$

(e) **Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n. Quelle loi suit Y_0 ?**

X_n étant à densité, F_n est continue et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0. Dès lors $\mathrm{H}_n : x \mapsto \mathrm{F}_n(e^x)$ l'est également par composition : Y_n est à densité.
On peut avoir H_n explicitement avec la question 2f :

- si $x < 0$, $e^x < 1$ et alors $\mathrm{H}_n(x) = \mathrm{F}_n(e^x) = 0$;
- si $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$ et alors $\mathrm{H}_n(x) = \mathrm{F}_n(e^x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\ln(e^x)^k}{e^x} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k e^{-x}$

En dérivant cette expression sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et en posant $h_n(1) = 0$ on obtient une densité de Y_n :

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x \leqslant 1 \\ -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(kx^{k-1} - x^k\right) e^{-x} \text{si } \ x > 1 \end{cases} \qquad (*)$$

C'est en fait assez malhabile ; et il vaut mieux dériver la relation entre H_n et F_n pour faire apparaître la fonction g_n :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}_n(x) = \mathrm{F}_n(e^x).$$

donc en dérivant sur $\mathbb{R}^*$ (le point problématique est celui où $e^x = 1$, donc $x = 0$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{H}_n'(x) = e^x \mathrm{F}_n'(e^x) = e^x f_n(e^x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ e^x < 1 \\ \frac{1}{n!} g_n(e^x) \text{ si } \ e^x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x < 0 \\ \frac{1}{n!} x^n e^{-x} \text{ si } \ x > 0 \end{cases}$$

et on pose $h_n(0) = 0$.
(c'est ce que vous retrouverez avec la 1ère méthode en téléscopant dans $(*)$).

Pour $n = 0$ on trouve notamment une densité de Y_0 :

$$h_0(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x \leqslant 0 \\ e^{-x} \text{ si } \ x > 0 \end{cases}$$

et on reconnaît $\mathrm{Y}_0 \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

(f) **Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_0 admet un moment d'ordre k, et que $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_0^k\right) = k!$.**

C'est une formule connue mais pas utilisable directement. Le trick ici est de repasser par les X_n et une formule de transfert.
En procédant comme en 3b et 3c, $\mathrm{Y}_0^k = \ln(\mathrm{X}_0)^k$ admet une espérance ssi l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} (\ln(x))^k f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} (\ln(x))^k \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_k$$

converge (absolument mais etc...) ce qui est acquis ; dès lors

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_0^k\right) = \int_1^{+\infty} (\ln(x))^k f_0(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_k = k!$$

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$ et on a, en particulier, $u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t$.

1. **Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.**

   La fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t+t^n}$ est définie et continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$ existe (pas de borne impropre ici !)

2. **Calculer u_0 et u_1.**

$$u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln\big(|2+t|\big)\Big]_0^1=\ln(3)-\ln(2)$$
$$u_1=\int_0^1\frac{1}{1+2t}\,\mathrm{d}t=\Big[\frac{1}{2}\ln\big(|1+2t|\big)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\ln(3)$$

3. (a) **Montrer que la suite (u_n) est croissante.**

   Soit $n\in\mathbb{N}$.
   On compare les fonctions à intégrer sur l'intervalle d'intégration :

$$\begin{aligned}\forall\, t\in[0,1],\, t^n\geqslant t^{n+1} &\Rightarrow 1+t+t^n\geqslant 1+t+t^{n+1}\\ &\Rightarrow \frac{1}{1+t+t^n}\leqslant\frac{1}{1+t+t^{n+1}}\end{aligned}$$

   donc en intégrant sur $[0,1]$:

$$\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{1}{1+t+t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

   et on conclut bien : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante.

   (b) **Montrer que :** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant\ln(2)$**.**

   C'est assez similaire : il faut majorer la quantité à intégrer.
   On remarque : $\forall\, t\in[0,1],\ 1+t+t^n\geqslant 1+t$ ce qui avec les mêmes étapes que la question précédente, donne

$$\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

   Or $\int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln\big(|1+t|\big)\Big]_0^1=\ln(2)$; et on a donc bien $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant\ln(2)$.

   (c) **En déduire que la suite (u_n) est convergente.**

   D'après les deux questions précédentes, (u_n) est croissante et majorée ; et donc convergente.

4. (a) **Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2)-u_n$ sous la forme d'une intégrale.**

   On s'inspire de l'apparition précédente de $\ln(2)$: $\ln(2)=\int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$. On a alors par linéarité de l'intégrale :

$$\ln(2)-u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+t+t^n}\right)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\,\mathrm{d}t$$

(b) **En déduire que :** $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$**.**

Avec la majoration : $\forall\, t \in [0,1],\ (1+t)(1+t+t^n) \geqslant 1$, on a :

$$\forall\, t \in [0,1] : \frac{1}{(1+t)(1+t+t^n)} \leqslant 1 \quad \text{(décroissance de la fonction inverse)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leqslant t^n \quad \text{multiplication par } t^n \geqslant 0$$

d'où en intégrant sur $[0,1]$:

$$\ln(2) - u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

(c) **Donner la limite de la suite** (u_n)

La question précédente donc $u_n \geqslant \ln(2) - \dfrac{1}{n+1}$; et on vu précédemment que $u_n \leqslant \ln(2)$. On obtient donc l'encadrement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$$

et avec $\dfrac{1}{n+1} \to 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$.

5. **Pour tout entier naturel** n **supérieur ou égal à 2, on pose** $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$**.**

(a) **Justifier la convergence de l'intégrale définissant** v_n**.**

$t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[1,+\infty[$; en $+\infty$ on a l'équivalent $\dfrac{1}{1+t+t^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n}$ (le polynôme au dénominateur équivaut à son terme de plus haut degré, qui est t^n car $n \geqslant 2$).

$n \geqslant 2$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann) ; donc par équivalence de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$ est bien une intégrale convergente.

(b) **Montrer que :** $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.

$\forall\, t \geqslant 1,\ \dfrac{1}{1+t+t^n} \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale on a $v_n \geqslant 0$.

On procède encore à une majoration : $\forall\, t \geqslant 1,\ 1+t+t^n \geqslant t^n$ donc $\dfrac{1}{1+t+t^n} \leqslant \dfrac{1}{t^n}$; d'où en intégrant sur $[1,+\infty[$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$$

et le calcul de cette dernière intégrale s'effectue en passant par une borne $\mathrm{A} \geqslant 1$:

$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{A}} t^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{A}-n+1}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \to -\frac{1}{-n+1} = \frac{1}{n-1} \quad \text{pour } \mathrm{A} \to +\infty$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}$$

et on a bien $v_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.

(c) **En déduire** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$**, puis donner la valeur de** $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$**.**

L'encadrement précédent donne, avec $\dfrac{1}{n-1}$ et un théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t = u_n + v_n$; et avec $u_n \to \ln(2)$ et $v_n \to 0$ on peut conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t\right) = \ln(2)$$