

## Programme de colle n°17 Semaine du 10/02

### Variables aléatoires à densité

**Attention : en cohérence avec l'étude des intégrales impropres, seules les densités admettant des limites finies à gauche et à droite en tout réel sont au programme.**

#### Variables à densité

- Fonction de répartition ; ses propriétés : croissance, limites en  $\pm\infty$ , continuité à droite en tout point.  
 $\forall a < b \in \mathbb{R}^2, \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ .  
Pour tout réel  $x$  :
  - $\mathbb{P}(X < x) = \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t)$
  - $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t)$
  - si  $F_X$  est continue en  $x$ , on a  $\mathbb{P}(X = x) = 0$ .
- La fonction de répartition d'une variable certaine  $X = a$  doit être connue.
- Réciproquement, toute fonction  $F$  croissante, tendant vers 0 en  $-\infty$  et 1 en  $+\infty$ , et continue à droite en tout point, est la fonction de répartition d'une certaine variable  $X$ .
- Une variable  $X$  est à densité ssi  $F_X$  est continue, et  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf en un nombre fini de points. Dans ce cas, toute fonction  $f$  telle que  $F_X' = f$  (sauf en un nombre fini de points) est appelée densité de  $f$ .  
*NB* : une variable à densité admet donc plusieurs densités ; notamment, en les points où  $F_X$  n'est pas dérivable, on peut donner une valeur arbitraire à  $f$ .
- Réciproquement, on appelle *densité* toute fonction  $f$  positive, continue sauf en un nombre fini de points, et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ . Il existe alors une variable de densité  $f$ .
- Si  $X$  est une variable de densité  $f$ , on a : pour tout réel  $x, \mathbb{P}(X = x) = 0$ .  
Expression des quantités  $\mathbb{P}(X \leq x), \mathbb{P}(X \geq x), \mathbb{P}(a < X \leq b)$  en fonction d'intégrales de  $f$ .  
Ces dernières probabilités sont inchangées si on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges.
- **Lois usuelles :**  
Expressions d'une densité et de la fonction de répartition pour :
  - $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ .
  - $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ .
  - $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  (et en particulier :  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ ).
- Une variable à densité  $f$  admet une espérance ssi  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  converge *absolument* ; on a alors  $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .  
Généralisation : moments d'ordre  $r \in \mathbb{N}^*$ .
- Une variable à densité  $f$  admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2. Elle admet alors une espérance, et on a :  $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ .

- Les étudiants doivent savoir repérer le cas d'une densité paire ; en cas d'existence de l'espérance, cette dernière est alors nulle.

**Rédaction attendue :** Une fois que la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  est démontrée, on peut dire sans démo supplémentaire : « par (im-)parité on en déduit que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge, et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx$  (cas pair) ou  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$  (cas impair) ». Néanmoins il faut pouvoir redémontrer cela si l'énoncé l'exige (changement de variable  $u = -t$ ).

- Espérances et variances des lois usuelles.
- Théorème de transfert : soit  $X$  de densité  $f$  nulle hors d'un intervalle  $[a, b]$  ; soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sauf en un nombre fini de points ; la variable  $g(X)$  admet une espérance ssi  $\int_a^b g(x)f(x) dx$  converge absolument.  
Dans ce cas  $\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(x)f(x) dx$ .
- Obtention de la fonction de répartition et/ou densité de var de type  $g(X)$  quand on connaît celle de  $X$  dans des cas simples :  $g$  est affine, est la fonction carré, exp, ln, etc.

### Cas de plusieurs variables aléatoires définies sur le même univers

- Linéarité et croissance de l'espérance (si  $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$  alors  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ ).
- Indépendance de variables aléatoires réelles :  $X$  et  $Y$  sont indépendantes ssi, pour tous intervalles  $I, J$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}(X \in I) \times \mathbb{P}(Y \in J)$$

Équivalence de cette définition avec le critère :  $X, Y$  indépendantes ssi, pour tous réels  $(t_1, t_2)$  :

$$\mathbb{P}([X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2]) = \mathbb{P}(X \leq t_1) \times \mathbb{P}(Y \leq t_2)$$

- Conséquence : si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, « tout événement portant uniquement sur  $X$  est indépendant de tout événement portant uniquement sur  $Y$  ».
- Extension à  $n$  variables mutuellement indépendantes.
- Résultats : lemme des coalitions ; espérance d'un produit de variables mutuellement indépendantes ; variance d'une somme de variables mutuellement indépendantes.
- Loi du max et du min de  $n$  variables aléatoires indépendantes (et en particulier, suivant la même loi) : la méthode doit être connue.