Sujets d'étude
(non ramassé)

Exercice 1 : caractérisation de la loi exponentielle comme loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose : $\forall x \geqslant 0,\ \mathbb{P}(X > x) > 0$.
On dit que la loi de X est sans mémoire ssi :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > y)$$

Le but de cet exercice est de montrer que l'unique loi sans mémoire est la loi exponentielle.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. Montrer que la loi de X est sans mémoire.

Réciproquement, soit X une variable aléatoire à densité définie sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction de répartition F est nulle sur $]-\infty, 0\,]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(X > x) > 0$.

2. Montrer :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \mathbb{P}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y) \quad (*)$$

On pose alors $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathbb{P}(X > x)$. Nous allons donner deux méthodes pour démontrer que G est de la forme $x \mapsto e^{-\lambda x}$.

3. Méthode 1 : équation différentielle.
On suppose ici que G est de classe $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$. *On note* $\lambda = -G'(0)$.
   (a) En utilisant la relation $(*)$, montrer :
   $$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ G'(x + y) = G(x)G'(y)$$
   puis que
   $$\forall x \geqslant 0,\ G'(x) = -\lambda G(x)$$
   (b) En déduire l'existence de $K \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \geqslant 0,\ G(x) = Ke^{-\lambda x}$.
   (c) En déduire que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ (on n'oubliera pas de justifier que $\lambda > 0$).

4. Méthode 2 : équation fonctionnelle de Cauchy[1].
On suppose cette fois que G est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On a vu que G vérifie :
   - $\forall x \geqslant 0,\ G(x) > 0$
   - $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ G(x + y) = G(x)G(y)$

   (a) Montrer que $G(0) = 1$.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \geqslant 0,\ G(nt) = G(t)^n$.
   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G\left(\frac{1}{n}\right) = G(1)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(G(1))\right)$.
   (d) Montrer finalement :
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ G\left(\frac{p}{q}\right) = \exp\left(\frac{p}{q}\ln(G(1))\right) \quad (**)$$
   (e) Justifier que $\ln(G(1)) < 0$: on le note alors $-\lambda$.
   (f) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
      i. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.
      ii. En utilisant $(**)$, montrer que $G(x) = e^{-\lambda x}$.
      iii. Conclure que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

[1] Oui, encore lui.

Exercice 2 : produit de convolution

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Si cette intégrale converge, on note

$$(f \star g) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Soient X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, admettant respectivement f_X et f_Y pour densités. On admet le résultat suivant :

> Si la fonction $h = f_X \star f_Y$ est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points, c'est une densité de $X+Y$.

1. Montrer que si f_X est bornée, alors $f_X \star f_Y$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   On admet sa continuité, qui sort largement du cadre de notre programme.

Quelques exemples :

2. *Lois uniformes.*
   Soient X et Y deux variables indépendantes, suivant la loi $\mathscr{U}([0,1])$; on pose $Z = X+Y$. On note alors $f_Z = f_X \star f_Y$: d'après le résultat admis c'est une densité de Z.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_X(x-t)f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_X(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$$

   (b) En déduire que si $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 2$ alors $f_Z(x) = 0$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

   (c) Représenter graphiquement sur la droite des réels les intervalles $[0,1]$ et $[x-1,x]$:
   - pour $x \in [0,1]$;
   - pour $x \in [1,2]$.

   et en déduire dans ces deux cas l'intervalle $[0,1] \cap [x-1,x]$.

   (d) Montrer finalement :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in [1,2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   (e) Représenter graphiquement la fonction f_Z.

3. *Somme de deux variables exponentielles indépendantes.*
   Soient X et Y deux variables indépendantes suivant $\mathscr{E}(1)$.

   (a) Montrer :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)e^{-(x-u)}\,\mathrm{d}u$$

   (b) En séparant les cas $x \leqslant 0$ et $x > 0$, déterminer une densité de $X+Y$.

4. *Somme de n variables exponentielles indépendantes.*
   Soient $X_1, \ldots, X_n$ iid, suivant la loi $\mathscr{E}(1)$.
   Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ qu'une densité de $\sum_{k=1}^{n} X_k$ est donnée par

   $$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : intégrales gaussiennes et lois normales

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$; on cherche à calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx}\,\mathrm{d}x = \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2}\,\mathrm{d}u$$

3. À l'aide d'un nouveau changement de variable affine, montrer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx}\,\mathrm{d}x = \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)\frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v$$

4. Conclure, en introduisant une densité de loi normale, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx}\,\mathrm{d}x = \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$