Sujets d'étude
Indications

Exercice 1 : caractérisation de la loi exponentielle comme loi sans mémoire

1. Simplifier l'événement $[(X > x) \cap (X > x+y)]$.
2.
3. (a) Dériver par rapport à la bonne variable ; puis donner une valeur spécifique à cette variable.
   (b)
   (c) Utiliser plusieurs propriétés de la fonction de répartition (et donc de $G = 1 - F_X$) pour obtenir le signe de λ et la valeur de K.
   Et ne pas oublier de parler de la fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ entier pour pouvoir conclure !!
4. (a) Utiliser $G(x+y) = G(x)G(y)$ en une valeur bien choisie.
   (b) $G(t+t) = G(t) \times G(t)$. Vous devriez savoir comment généraliser ensuite.
   (c) Remarquer que $1 = n \times \dfrac{1}{n}$ et appliquer le point précédent.
   (d)
   (e) Justifier que $G(1) \in]0,1]$ pour commencer ; si $G(1) = 1$ que dire de $G(n)$? En observant $\lim_{n\to+\infty} G(n)$ on conclut à une absurdité.
   (f) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
      i. Encadre la partie entière.
      ii. On choisit $p = \lfloor nx \rfloor \in \mathbb{N}$, et $q = n \in \mathbb{N}^*$... passer à la limite PROPREMENT ensuite.
      iii. Ne pas oublier de parler de la fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ entier pour pouvoir conclure !!

Exercice 2 : produit de convolution

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Si cette intégrale converge, on note

$$(f \star g) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Soient X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, admettant respectivement f_X et f_Y pour densités. On admet le résultat suivant :

> Si la fonction $h = f_X \star f_Y$ est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points, c'est une densité de $X+Y$.

1. Majorer $|f(x-t)g(t)|$ pour conclure que l'intégrale définissant $f_X \star f_Y$ converge absolument.
2. (a) Que vaut f_Y hors de $[0,1]$? et sur $[0,1]$?
   (b) Pour la prédiction : $Z(\Omega) = ?$
   (c)
   (d) Une fois qu'on est sur le bon intervalle, on intègre la fonction constante égale à 1 ! donc bien soigner ses dessins.
   (e)
3. (a)
   (b) La disjonction de cas donne l'intervalle sur lequel les quantités à intégrer sont non nulles.
4. En notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ la récurrence utilise le fait que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Attention pour utiliser la formule il convient de montrer qu'on a des variables indépendantes !!

Exercice 3 : intégrales gaussiennes et lois normales

1.
2. On rappelle que les changements de variable affines peuvent se faire directement sur des intégrales impropres. Ça raccourcit bien la rédaction !
3.
4.