Concours Blanc n°2
Maths 1
Corrigé

Exercice 1

Partie I

1. **Soit** A **la matrice de** $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ **donnée par :** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

   (a) **Calculer** $A^2 - 7A$.

   Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$ puis $\boxed{A^2 - 7A = -12I_3}$

   (b) **En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de** A **sont les réels** 3 **et** 4.

   On déduit de la question précédente que $X^2-7X+12$ est un polynôme annulateur de A. On sait alors que les valeurs propres de A sont racines de ce polynôme.
   On trouve sans difficulté que 3 et 4 sont les racines de $X^2-7X+12$, ce qui montre que $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{3,4\}}$

   (c) **Trouver alors toutes les valeurs propres de** A**, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous espace propre associé.**
   Il suffit de voir si 3 et 4 sont valeurs propres.
   En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on trouve $AX = 3X \Leftrightarrow x = y - 2z$: il y a des solutions non nulles donc $3 \in \mathrm{Sp}(A)$ et

   $$E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x = y-2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

   La famille de deux colonnes introduite ici est génératrice de $E_3(A)$; libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires ; donc est une base de $E_3(A)$.

   Par une démarche similaire :
   $$AX = 4X \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$
   donc
   $$E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

   $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille à un vecteur non nul, donc libre : c'est une base de $E_4(A)$.

   On sait qu'il ne peut pas y avoir d'autre valeur propre : on a bien ici toutes les valeurs propres et tous les sous-espaces propres de A.

   (d) **La matrice** A **est-elle inversible ?**

   C'est direct : $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ donc $\boxed{\text{A est inversible}}$.

2. **Soit** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**.**

   (a) **Déterminer le noyau de** B**. En déduire une valeur propre de** B **et le sous-espace propre associé.**

   Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a $BX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ après des manipulations sans difficulté.
   On en déduit $\mathrm{Ker}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$; il n'est pas réduit au vecteur nul donc c'est le sous-espace propre de B associé à la valeur propre 0.

   (b) **Déterminer le rang de la matrice** $B - 2I_3$**. En déduire une valeur propre de** B **et le sous-espace propre associé.**
   $B-2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On observe que C_1 et C_3 sont égales, et C_1, C_2 non colinéaires : $\boxed{\mathrm{rg}(B - 2I_3) = 2}$.
   Notamment $B - 2I_3$ n'est pas inversible : $2 \in \mathrm{Sp}(B)$.
   On cherche alors le sous-espace propre :

$$BX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

   donc $E_2(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

   (c) **Calculer** $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$**. Sans résoudre un système, en déduire une troisième valeur propre de B et le sous-espace propre associé.**

   $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $3 \in \mathrm{Sp}(B)$.
   $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc on sait que $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) \leqslant 3$. Comme E_0 et E_2 sont de dimension 1, on en déduit que $\dim(E_3(B)) = 1$ et donc $E_3(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

3. **Trouver une matrice** P **inversible (on justifiera cette inversibilité) vérifiant toutes les conditions ci-dessous :**

   - **La matrice** $D_2 = P^{-1}\, B\, P$ **est égale à** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$**,**
   - **Les coefficients situés sur la première ligne de** P **sont** 1**,** 1 **et** -1 **(de gauche à droite),**
   - **La matrice** $D_1 = P^{-1}\, A\, P$ **est également diagonale.**

   On construit P à partir de la première condition : cela revient à diagonaliser B.
   On range les générateurs des trois sous-espaces propres de B dans l'ordre demandé pour les valeurs propres, et on multipliant le troisième par (-1) pour satisfaire la condition sur la première ligne de P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   P ainsi obtenue est inversible car obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de B.
   Ceci fixant P de manière unique, il reste à prier pour que la troisième condition soit satisfaite.
   On sait que $P^{-1}AP$ sera diagonale ssi P est la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres de A. Il suffit donc de vérifier que les colonnes de P sont des vep de A.
   On vérifie rapidement par calcul explicite :

- $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
- $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(on aurait aussi pu observer que ces deux colonnes vérifient $x = y - 2z$, qui est la CNS d'appartenance à $E_3(A)$).

Enfin $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \in E_4(A)$ (voir question 1c). Ainsi $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D_1$ est bien diagonale.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$**,** $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$**, et pour tout entier naturel** n **:** $X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n$**.**

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **la suite matricielle définie par :** $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = P^{-1}X_n$**.**

4. **Démontrer que :** $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$**.**

   Calcul assez direct (et pas besoin d'équivalences !!!)

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} &= P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n\right) \\
&= P^{-1}\left(\frac{1}{6}PD_1P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}PD_2P^{-1}X_n\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(P^{-1}PD_1P^{-1}X_{n+1} + P^{-1}PD_2P^{-1}X_n\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(D_1(P^{-1}X_{n+1}) + D_2(P^{-1}X_n)\right) \\
\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+2} &= \frac{1}{6}\left(D_1Y_{n+1} + D_2Y_n\right)
\end{aligned}$$

5. **Pour tout entier naturel** n**, on note** $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$**.**

   Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{ll} a_{n+2} & = \frac{1}{2}\ a_{n+1} + \frac{1}{2}\ a_n \\ b_{n+2} & = \frac{1}{2}\ b_{n+1} \\ c_{n+2} & = \frac{2}{3}\ c_{n+1} + \frac{1}{3}\ c_n \end{array}\right.$$

   En reprenant les expressions de D_1 et D_2 il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D_1Y_{n+1} = \begin{pmatrix} 3a_{n+1} \\ 3b_{n+1} \\ 4c_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } D_2Y_n = \begin{pmatrix} 3a_n \\ 0 \\ 2c_n \end{pmatrix}$$

   $Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$ donne alors

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{n+1} \\ \frac{1}{2}b_{n+1} \\ \frac{2}{3}c_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n \\ 0 \\ \frac{1}{3}c_n \end{pmatrix}$$

   ce qui équivaut bien au système indiqué.

6. **Démontrer que** $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$**, puis calculer les matrices** Y_0 **et** Y_1**.**

   On vérifie par un calcul explicite que $P \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = I_3$; ce qui montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   On a ensuite $Y_0 = P^{-1}X_0 = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; et de même $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. **Pour tout entier naturel** n**, calculer** a_n**,** b_n **et** c_n **en fonction de** n**.**

   (a_n) vérifie : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{1}{2}\, a_{n+1} + \frac{1}{2}\, a_n$ donc est récurrente linéaire d'ordre 2.
   L'équation caractéristique est $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$; on trouve les racines 1 et $-\frac{1}{2}$; de sorte qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   Or on sait que $a_0 = 2$ (première composante de Y_0) et $a_1 = 1$ (première composante de Y_1). On obtient le système :

   $$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \end{cases}$$

   d'où on tire $\lambda = \frac{4}{3}$ et $\mu = \frac{2}{3}$:

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   On procède de même pour c_n (avec $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, troisièmes composantes respectives de Y_0 et Y_1) :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

   Enfin, $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = \frac{1}{2}\, b_{n+1}$: $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique. (attention au $_{n\geqslant 1}$). Avec $b_1 = 1$ (seconde composante de Y_1) on obtient :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = b_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

   relation encore valable pour $n = 0$ car $b_0 = 2$ (seconde composante de Y_0)

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

8. **En déduire l'expression de** X_n **en fonction de** n**, pour tout entier naturel** n**.**
   On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$**, et on vérifiera que :**

   $$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \\ \dots \end{pmatrix}$$

   et on trouve en seconde position la valeur demandée pour β_n.

9. (a) **Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :**

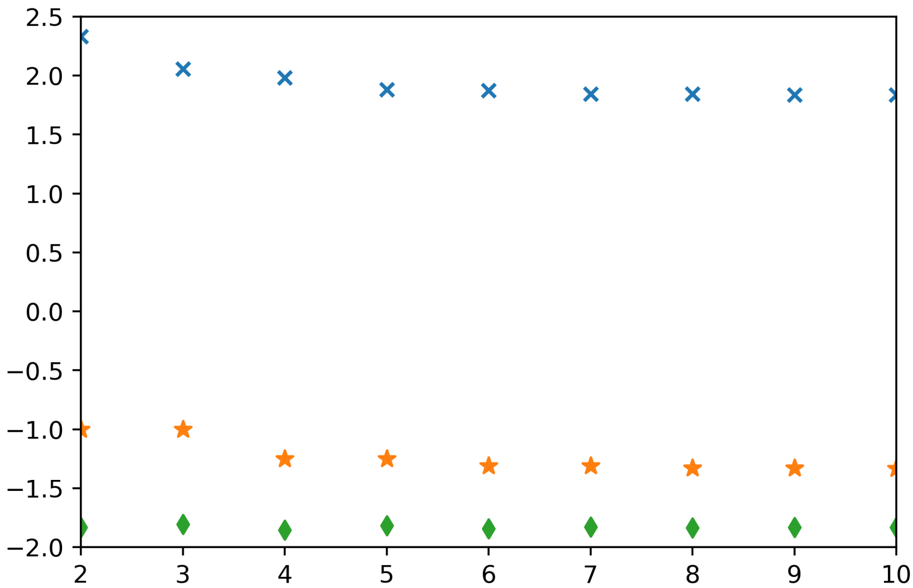
```
def X(n):
    Xold = np.array([3,0,-1])
    Xnew = np.array([3,0,-2])
    A=np.array([[2,1,-2],[0,3,0],[1,-1, 5]])
    B=np.array([[1,-1,-1],[-3,3,-3],[-1,1,1]])
    for i in range(2,n+1):
        Aux = 1/6*(np.dot(A,Xnew)+np.dot(B,Xold))
        Xold = Xnew
        Xnew = Aux
    return Xnew
```

Il s'agit de faire calculer le n-ème terme d'une suite définie par une récurrence double $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.
Ici on maintient une variable `Xold` qui contient u_n et une variable `Xnew` qui contient u_{n+1}.
Pour passer d'une étape à la suivante, il faut transférer le contenu de `Xnew` dans `Xold`, puis calculer le nouveau terme... mais on a alors perdu la valeur de `Xold` utile à ce calcul !
On peut utiliser la variable `Aux` de la manière suivante :

- Étape 0 : `Xold` contient u_n, `Xnew` contient u_{n+1}.
- Étape 1 : `Xold` contient u_n, `Xnew` contient u_{n+1}, `Aux` contient u_{n+2} calculé à partir de `Xold` et `Xnew`
- Étape 2 : on transfère le contenu de `Xnew` dans `Xold` : `Xold` contient u_{n+1}, `Xnew` contient u_{n+1}, `Aux` contient u_{n+2}.
- Étape 3 : on transfère le contenu de `Aux` dans `Xnew` : `Xold` contient u_{n+1}, `Xnew` contient u_{n+2}.

Enfin, le « `for range(2,n+1)` » boucle $n-1$ fois : si `Xnew` contient X_1 au départ, il contiendra X_n à la fin. Il faut donc renvoyer `Xnew`.

(b) **La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure ci-dessous) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.**
Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.



Pur identifier les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il suffit, au vu de la figure proposée, de regarder les limites en $+\infty$.
$\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^n$ tendent vers 0.
La formule de l'énoncé permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \simeq -1,33$: les étoiles représentent donc les termes de (β_n).

On a ensuite
$$\gamma_n = -\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \xrightarrow{n\to+\infty} -\frac{11}{6} \simeq -1.83$$
Les losanges représentent donc les termes de (γ_n) ; et par élimination les croix représentent donc les termes de (α_n).

Exercice 2

Soit V **une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction** F_V **définie par :**
$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. **Reconnaître la loi suivie par V. Donner sans calcul les valeurs de** $\mathbb{E}(V)$ **et de la variance de V.**

   Clairement $V \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$; d'après le cours $\mathbb{E}(V) = V(V) = 1$.

On pose $W = -\ln(V)$ **et on admet que** W **est aussi une variable aléatoire dont on note la fonction de répartition** F_W**. On dit que** W **suit la *loi de Gumbel.***

2. (a) **Montrer que :** $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = e^{-e^{-x}}$**.**

   Par définition de la fonction de répartition :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) &= \mathbb{P}(W \leqslant x)\\ &= P(-\ln(V) \leqslant x)\\ &= P(\ln(V) \geqslant -x)\\ &= P(V \geqslant e^{-x}) \quad \text{(stricte croissance d'exp sur } \mathbb{R})\\ &= P(V > e^{-x}) \quad \text{(V est à densité)}\\ &= 1-F_V(e^{-x})\\ &= 1-(1-\exp(-e^{-x})) \quad (e^{-x}>0 \text{ donc on utilise l'expression de } F_V \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)\\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) &= \exp(-e^{-x})\end{aligned}$$

   (b) **En déduire que** W **est une variable à densité, et en donner une densité qu'on notera** f_W**.**

   F_W exprimée ci-dessus est clairement $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc W est à densité.
   Une densité s'obtient en dérivant sur $\mathbb{R}$ entier (pas de souci de point de transition ici !) :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_W(x) = F_W'(x) = e^{-x}\exp(-e^{-x})$$

On désigne par n **un entier naturel supérieur ou égal à 2, et par** $X_1, \ldots, X_n$ **des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que** V**.**
On considère la variable aléatoire Y_n **définie par** $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$**, c'est à dire que pour tout** ω **de** Ω**, on a :** $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$**.**

3. (a) **Montrer que la fonction de répartition** F_{Y_n} **de** Y_n **est donnée par :**
$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   Loi du max de variables iid : à savoir faire les yeux fermés !!
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = P(\max(X_1,...,X_n) \leqslant x) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant x)\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) \quad \text{(indépendance mutuelle des } X_i)\\ &= \prod_{i=1}^{n} F_V(x) \quad \text{(les } X_i \text{ suivent la même loi que V)}\\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) &= (F_V(x))^n\end{aligned}$$

et on en déduit l'expression demandée en reportant l'expression de F_V.

(b) **Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et en donner une densité f_{Y_n} continue sur $\mathbb{R}$.**

V étant à densité, F_V est continue sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points ; $F_{Y_n} = (F_V)^n$ possède donc les mêmes régularités et Y_n est bien à densité.
On obtient une densité en dérivant F_{Y_n} sur $\mathbb{R}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ici on ne fait pas n'importe quoi pour $f_{Y_n}(0)$ car l'énoncé demande d'obtenir une densité continue !
On observe que $\lim\limits_{x\to 0^-} f_{Y_n}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{Y_n}(x) = ne^{-0}(1-e^{-0})^{n-1} = 0$; en posant $f_{Y_n}(0) = 0$ on obtient bien f_{Y_n} continue sur $\mathbb{R}$ (elle l'est clairement sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions continues).

4. (a) **Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est convergente.**

$\forall t > 0,\ 1 - F_{Y_n}(t) = 1 - (1-e^{-t})^n$.
Pour $t \to +\infty$, $e^{-t} \to 0$ et on peut donc utiliser un DL :

$$1 - (1-e^{-t})^n = 1 - (1 + n(-e^{-t}) + o(e^{-t})) = n\,e^{-t} + o(e^{-t}) \underset{t\to+\infty}{\sim} ne^{-t}$$

Ensuite :

- $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- $1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} ne^{-t}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} ne^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence)

donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(b) **Établir l'égalité suivante :**

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t = x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\,\mathrm{d}t$$

Il s'agit manifestement d'une IPP.
On dérive $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ en $t \mapsto -f_{Y_n}(t)$; et on intègre $t \mapsto 1$ en $t \mapsto t$.

MAIS attention, finesse !! F_{Y_n} est-elle $\mathscr{C}^1$? Et a-t-on toujours $F'_{Y_n} = f_{Y_n}$?
Ici oui, car on a choisi f_{Y_n} continue ; d'après le théorème fondamental de l'analyse, $F_{Y_n} : t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^t f_{Y_n}(u)\,\mathrm{d}u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée f_{Y_n}.

On peut donc effectuer l'IPP sur le segment $[0, x]$ avec des fonctions $\mathscr{C}^1$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t &= \big[t\big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\big]_0^x - \int_0^x t(-f_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t \\ &= x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(c) **Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) = 0$.**

On reprend l'équivalent trouvé précédemment :

$$x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times n\,e^{-x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

en reconnaissant une croissance comparée.
On a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) = 0$.

(d) **En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :**

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t$$

On examine la convergence absolue de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\,\mathrm{d}t$ (f_{Y_n} étant nulle sur $\mathbb{R}_-$).
La quantité à intégrer est positive donc ceci équivaut à la convergence « simple » de l'intégrale. Il s'agit donc d'étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x t f_{Y_n}(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
Or on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t f_{Y_n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t - x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) \quad (**)$$

et on vient de voir que $x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$, et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t$ est convergente.
En reprenant $(**)$ et en faisant $x \to +\infty$, on obtient que $\mathbb{E}(Y_n)$ existe, et que

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t$$

5. (a) **Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - e^{-t}$, que l'on a :**

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u$$

En faisant le changement demandé :

$$u = 1 - e^{-t} \Leftrightarrow t = -\ln(1-u) \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t &= \int_0^x \left(1 - (1-e^{-t})^n\right) \mathrm{d}t \quad \text{(expression de } F_{Y_n} \text{ sur } \mathbb{R}_+)\\
&= \int_{1-e^{-0}}^{1-e^{-x}} \left(1 - u^n\right) \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u\\
\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t &= \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

(b) **En déduire que $\displaystyle\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.**

On reconnaît une somme géométrique : sur $[0, 1-e^{-x}]$, $u \neq 1$ donc

$$\frac{1-u^n}{1-u} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t &= \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{1-e^{-x}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k\right) \mathrm{d}u\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^{1-e^{-x}} u^k\,\mathrm{d}u\right) \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^{1-e^{-x}}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-e^{-x})^{k+1}}{k+1}\\
\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-x})^k}{k} \quad \text{(décalage d'indice « } k = k+1 \text{ »)}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\mathrm{d}t\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-x})^k}{k}\right)\\ \mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

6. **On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$; on note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.**

   (a) **Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.**

   Sans souci particulier :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leqslant x) = P(Y_n - \ln(n) \leqslant x) = P(Y_n \leqslant x + \ln(n) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$$

   (b) **Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.**

   On a pour tout x : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

   - Si $x + \ln(n) < 0$, $F_{Z_n}(x) = 0$.
   - Si $x + \ln(n) \geqslant 0$, $F_{Z_n}(x) = \left(1 - e^{-(x+\ln(n))}\right)^n = \left(1 - e^{-x}e^{-\ln(n)}\right)^n = \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n$.

   Pour résumer :

   $$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n)\\ \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n)\end{cases}$$

   (c) **Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que pour n assez grand, $F_{Z_n}(x) = \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n$.**

   x est fixé et $-\ln(n) \xrightarrow{n\to+\infty} -\infty$; donc pour n assez grand on aura $x \geqslant -\ln(n)$ et $F_{Z_n}(x) = \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n$.

   (d) **En déduire, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x)$.**

   D'après la remarque précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n$.
   On retombe sur une limite vue et revue :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = e^{-e^{-x}}$$

7. **On réalise les imports suivants en Python :**

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

   En Python, la commande `rd.exponential(a,n)` renvoie un `np.array` à n composantes qui sont des tirages indépendants d'une variable suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}\left(\dfrac{1}{a}\right)$ (et non pas $\mathscr{E}(a)$, attention !!)

   (a) **En utilisant `rd.exponential`, écrire une fonction Python d'en-tête `def tirageW(k)` qui renvoie un `np.array` de k tirages indépendants de W. En déduire un moyen d'afficher une valeur approchée de $\mathbb{E}(W)$ (dont on admet l'existence).**

   On se souvient que $W = -\ln(V)$ où $V \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. On propose alors :

```python
def tirageW(k):
    V = rd.exponential(1,k)
    return -np.log(V)
```

(ici le `np.log` agit composante par composante sur le `np.array V`).

On obtient une approximation de l'espérance de W en renvoyant la moyenne d'un grand nombre de tirages de W effectués par cette fonction (loi faible des grands nombres) :

```
print(np.mean(tirageW(10000)))
```

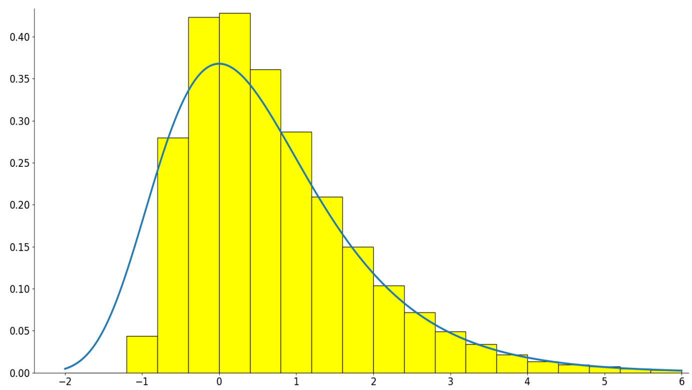
(b) **Écrire une fonction Python d'en-tête `def tirageZn(n)` qui renvoie un tirage de Z_n.**
On commence par simuler Y_n comme max de n variables exponentielles indépendantes ; puis $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

```
def tirageZn(n):
    Y = max(rd.exponential(1,n))
    return Y - np.log(n)
```

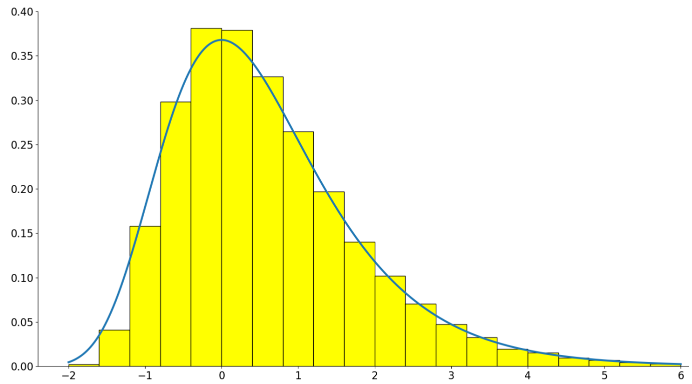
(c) **On considère le code suivant :**

```
X=np.linspace(-2,6,1000)
def Gumbel(x):
    return ....

plt.plot(X,Gumbel(X),linewidth=3) # linewidth : épaisseur du trait

n = ...
L=[tirageZn(n) for k in range(100000)]
plt.hist(L,20,density=True)
plt.show()
```

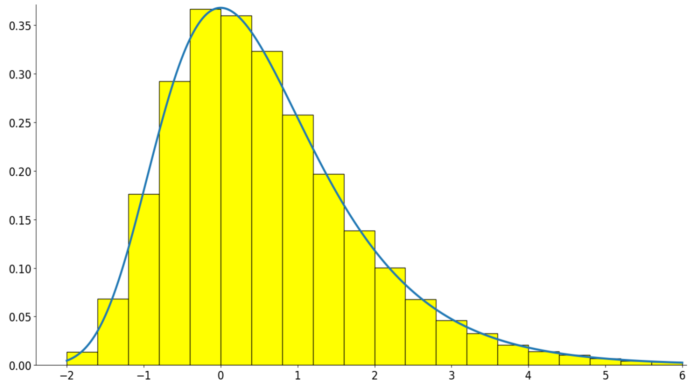
En l'exécutant successivement avec `n`= 3, `n`= 10 et `n`= 50 on obtient les 3 figures suivantes :



$n = 3$



$n = 10$



$n = 50$

Comment interpréter cela ? Quelle est l'expression de la fonction `Gumbel(x)` ?

La courbe est le tracé de la fonction `Gumbel` sur l'intervalle $[-2, 6]$.
Les histogrammes représentent graphiquement 100000 tirages de Z_n : on sait que cette représentation graphique reproduit l'allure d' une densité de Z_n.

On voit que lorsque n devient grand, l'histogramme s'aligne sur la courbe : ainsi la fonction `Gumbel` est approximativement égale à la densité de Z_n.
Or on a vu que pour $n \to +\infty$, $F_{Z_n}(x) \to F_W(x)$; ceci implique qu'à n grand, un histogramme des Z_n s'alignera sur une densité de la variable W.
On en déduit que la fonction `Gumbel` est la densité (continue) de la loi de Gumbel :

```
def Gumbel(x):
    return np.exp(-x)*np.exp(-np.exp(-x))
```

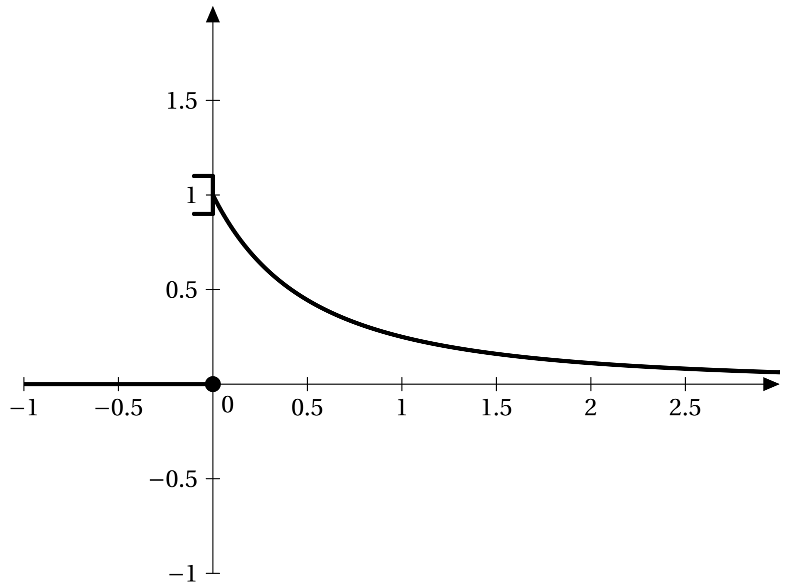
Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

1. **Tracer l'allure de la courbe représentative de f.**

Sur $\mathbb{R}_+^*$ f est $\mathscr{C}^1$ et $f'(t) = -\dfrac{2}{(1+t)^3} < 0$; donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 0 en $+\infty$.
On en déduit la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$:



2. **Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.**

f étant nulle sur $\mathbb{R}_-$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
On introduit $A \geqslant 0$:

$$\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1 \xrightarrow{A \to +\infty} 1$$

ce qui donne l'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, qui est égale à 1.

Soit $x \geqslant 0$ fixé.
On considère la fonction φ_x définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, u \geqslant 0,\ \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t$$

3. (a) **Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.**

$\varphi_x(0) = \int_x^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et

$$\lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u) = \lim_{u\to+\infty} \left(\int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

car on sait que cette intégrale converge.

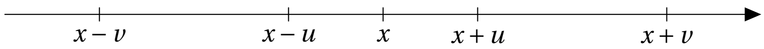
(b) **Montrer que :**

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^2,\ \ u < v \ \Rightarrow\ \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\mathrm{d}t$$

Pour tous $u < v$:

$$\begin{aligned} \varphi_x(v) - \varphi_x(u) = \int_{x-v}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{x-v}^{x-u} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x-v}^{x-u} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(on peut visualiser ça en remarquant que si $0 \leqslant u < v$, l'intervalle $[x-u, x+u]$ est inclus dans $[x-v, x+v]$)



De plus f est positive sur $\mathbb{R}$ et $u < v \Rightarrow x - v < x + v$, donc par positivité de l'intégrale :

$$\int_{x-v}^{x-u} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

On en conclut que pour tous $(u,v) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $u < v$ on a :

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) = \underbrace{\int_{x-v}^{x-u} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} + \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(c) **En déduire que φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.**

Il faut montrer : $u < v \Rightarrow \varphi_x(u) < \varphi_x(v)$.
Si $0 \leqslant u < v,\ x+u < x+v$; de plus f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$; donc

$$\int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Dès lors,

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

ce qui suffit à conclure : φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(d) **On admet que φ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $u \geqslant 0$, admet une unique solution.**

D'après ce qui précède, φ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ (admis), strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; $\varphi_x(0) = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi_x(u) = 1$; d'après le théorème de la bijection, φ_x réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,1[$.
$\dfrac{1}{2} \in [0,1[$ donc il existe un unique $u \geqslant 0$ tel que $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$.

On note $\mathrm{U} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, associe $\mathrm{U}(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\displaystyle\int_{x-\mathrm{U}(x)}^{x+\mathrm{U}(x)} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

4. (a) **Vérifier : $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, $\mathrm{U}(x) = 1 - x$.**

On sait que $\mathrm{U}(x)$ est défini de manière unique par l'équation donnée : si on veut montrer que $\mathrm{U}(x) = 1-x$ il suffit de vérifier que $1-x$ est une solution.

Or : $\displaystyle\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{2x-1)}^{1} f(t)\mathrm{d}t$, et comme $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ on a $2x-1<0$; de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{2x-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{2x-1}^{0} \underbrace{f(t)}_{=0} \mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \underbrace{f(t)}_{=\frac{1}{(1+t)^2}} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Par unicité de $\mathrm{U}(x)$, on a bien $\mathrm{U}(x) = 1-x$.

(b) **Pour tout** $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$**, montrer que :** $\varphi_x(x) \geqslant \frac{1}{2}$**, puis :** $x - \mathrm{U}(x) \geqslant 0$**, et en déduire :** $\mathrm{U}(x) = \sqrt{4+(x+1)^2} - 2$**.**

Soit $x \geqslant \frac{1}{2}$. $[0,2x] \subset \mathbb{R}_+$ donc on a :

$$\varphi_x(x) = \int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2x} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{1+2x}$$

Or :

$$x \geqslant \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2x+1 \geqslant 2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+2x} \leqslant \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{1+2x} \geqslant \frac{1}{2}$$

On a donc bien $\varphi_x(x) \geqslant \frac{1}{2}$.

Donc $\varphi_x(x) \geqslant \varphi_x(\mathrm{U}(x))$; et par stricte croissance de φ_x on en déduit $x \geqslant \mathrm{U}(x)$ et donc $x - \mathrm{U}(x) \geqslant 0$.

Du coup

$$\begin{aligned}\varphi_x(\mathrm{U}(x)) &= \int_{x-\mathrm{U}(x)}^{x+\mathrm{U}(x)} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{x-\mathrm{U}(x)}^{x+\mathrm{U}(x)} \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \quad (\text{car } [x-\mathrm{U}(x), x+\mathrm{U}(x)] \subset \mathbb{R}_+) \\ &= \frac{1}{1+x-\mathrm{U}(x)} - \frac{1}{1+x+\mathrm{U}(x)} \\ &= \frac{1}{2} \quad (\text{par définition de } \mathrm{U}(x))\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{U}(x)$ vérifie

$$\frac{1}{1+x-\mathrm{U}(x)} - \frac{1}{1+x+\mathrm{U}(x)} = \frac{1}{2}$$

On s'énerve un peu :

$$\frac{1}{1+x-\mathrm{U}(x)} - \frac{1}{1+x+\mathrm{U}(x)} = \frac{1+x+\mathrm{U}(x) - (1+x-\mathrm{U}(x))}{(1+x)^2 - \mathrm{U}(x)^2} = \frac{2\mathrm{U}(x)}{(1+x)^2 - \mathrm{U}(x)^2}$$

donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+x-\mathrm{U}(x)} - \frac{1}{1+x+\mathrm{U}(x)} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\, &\frac{2\mathrm{U}(x)}{(1+x)^2-\mathrm{U}(x)^2} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\, &(1+x)^2 - \mathrm{U}(x)^2 = 4\mathrm{U}(x) \quad \text{produit en croix :)}\end{aligned}$$

Finalement $\mathrm{U}(x)$ est une racine de $\mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} - (1+x)^2$.

$\Delta = 16 + 4(1+x)^2$ donc les racines sont $\frac{1}{2}\left(-4 \pm \sqrt{16+4(1+x)^2}\right) = -2 \pm \sqrt{4+(1+x)^2}$.

Enfin par définition $\mathrm{U}(x) \geqslant 0$: on retient donc la racine positive.

$$\forall\, x \geqslant \frac{1}{2},\ \mathrm{U}(x) = \sqrt{4+(1+x)^2} - 2$$

5. (a) **Montrer que l'application U est continue sur $\mathbb{R}_+$.**

Les expressions précédentes montrent que U est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ (affine) et sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ (composée de fonctions continues, la quantité sous la racine est $\geqslant 0$).
Il suffit alors de « raccorder » en $\frac{1}{2}$. D'après la question 4b,

$$\mathrm{U}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{4+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} - 2 = \sqrt{4+\frac{9}{4}} - 2 = \sqrt{\frac{25}{4}} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

et $\lim\limits_{x\to 1/2^+} \mathrm{U}(x) = \mathrm{U}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
Enfin d'après 4a, $\lim\limits_{x\to 1/2^-} \mathrm{U}(x) = \lim\limits_{x\to 1/2^-} (1-x) = \frac{1}{2}$.

U est bien continue en $\frac{1}{2}$, et finalement elle est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) **Dresser le tableau de variations de U, et préciser sa limite en $+\infty$.**
Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, $\mathrm{U} : x \mapsto 1-x$ est strictement décroissante ; sur $[0, +\infty[$, $\mathrm{U} : x \mapsto \sqrt{4+(1+x)^2} - 2$ est strictement croissante. De plus par composition de limites usuelles,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{U}(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4+(1+x)^2} - 2 = +\infty$$

6. **On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :**

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \mathrm{U}(a_n) \end{cases}$$

(a) **Montrer que la suite (a_n) est bien définie, et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant \frac{1}{2}$.**

Le tableau de variations précédent montre que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \mathrm{U}(x) \geqslant \frac{1}{2}$.
On montre par récurrence sur n la propriété $\mathscr{P}(n)$: « a_n existe et $a_n \geqslant \frac{1}{2}$ ».
On a $a_0 = 1 \geqslant \frac{1}{2}$; et si a_n existe et est $\geqslant \frac{1}{2}$, alors $\mathrm{U}(a_n) = a_{n+1}$ est bien défini et est $\geqslant \frac{1}{2}$.
La propriété est donc bien établie par récurrence sur n.

(b) **Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.**

La méthode la plus rapide est de reprendre la question 4b : $\forall\, x \geqslant \frac{1}{2},\ x - \mathrm{U}(x) \geqslant 0$.
Or pour tout entier n, $a_n \geqslant \frac{1}{2}$, donc $a_n - \mathrm{U}(a_n) \geqslant 0$ ce qui donne $a_{n+1} \leqslant a_n$: (a_n) est décroissante.

Sinon on peut établir que $a_1 = 2\left(\sqrt{2}-1\right) \leqslant a_0$ et montrer par récurrence que $a_{n+1} \leqslant a_n$ (avec la croissance de U sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, intervalle où vivent les a_n).

(c) **En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et montrer que sa limite vaut $\frac{1}{2}$.**
(a_n) est décroissante, minorée par $\frac{1}{2}$, donc converge vers $\ell \geqslant \frac{1}{2}$. U étant continue sur $\mathbb{R}_+$ on a $\mathrm{U}(\ell) = \ell$; comme $\ell \geqslant \frac{1}{2}$ cette équation s'écrit $\sqrt{4+(1+\ell)^2} - 2 = \ell$.

$$\begin{aligned} \sqrt{4+(1+\ell)^2} - 2 = \ell &\Leftrightarrow \sqrt{4+(1+\ell)^2} = \ell + 2 \\ &\Leftrightarrow 4 + (1+\ell)^2 = (\ell+2)^2 \quad \text{(bijectivité de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ &\Leftrightarrow \ell = \frac{1}{2} \quad \text{(en développant)} \end{aligned}$$

On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.