ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Concours Blanc n°2
Maths 1

3/03/2025

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Si aucune question d'informatique de l'exercice 1 n'est traitée sérieusement, ou aucune question d'informatique de l'exercice 2 n'est traitée sérieusement, un malus de 1 pt sera appliqué à la note finale.

Exercice 1

Partie I

1. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer $A^2 - 7A$.

   (b) En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.

   (c) Trouver alors toutes les valeurs propres de A, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous espace propre associé.

   (d) La matrice A est-elle inversible ?

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer le noyau de B. En déduire une valeur propre de B et le sous-espace propre associé.

   (b) Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$. En déduire une valeur propre de B et le sous-espace propre associé.

   (c) Calculer $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sans résoudre un système, en déduire une troisième valeur propre de B et le sous-espace propre associé.

3. Trouver une matrice P inversible (on justifiera cette inversibilité) vérifiant toutes les conditions ci-dessous :

   - La matrice $D_2 = P^{-1}\,B\,P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   - Les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),
   - La matrice $D_1 = P^{-1}\,A\,P$ est également diagonale.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n$.
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$.

4. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$.

5. Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\, a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\, a_n \\ b_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\, b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \dfrac{2}{3}\, c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\, c_n \end{cases}$$

6. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.

7. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

8. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

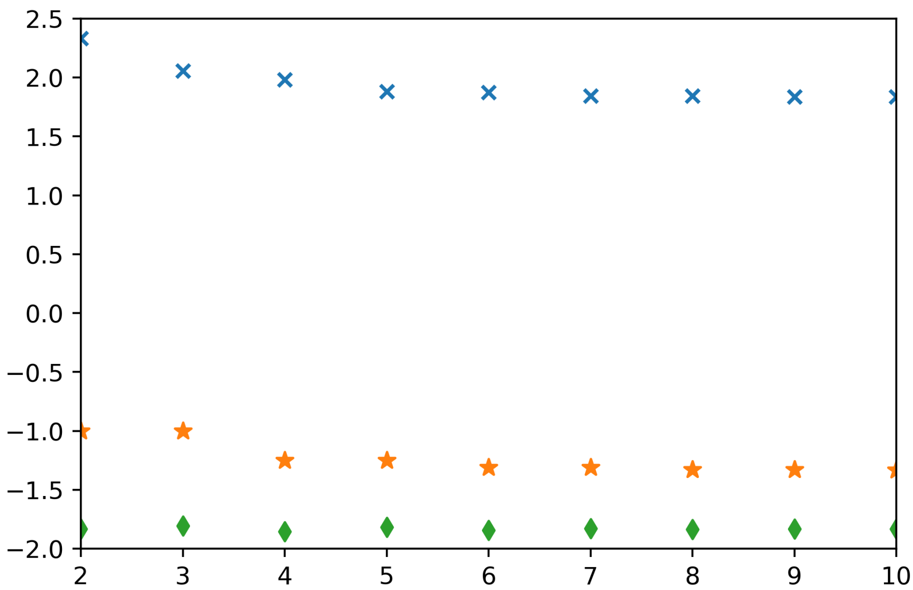
On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

9. (a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
def X(n):
    Xold = np.array([3,0,-1])
    Xnew = np.array([3,0,-2])
    A=np.array([[2,1,-2],[0,3,0],[1,-1,5]])
    B=np.array([[1,-1,-1],[-3,3,-3],[-1,1,1]])
    for i in range(2,n+1):
        Aux = ................
        Xold = ................
        Xnew = ..............
    return ............
```

(b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure ci-dessous) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.



Exercice 2

Soit V une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi suivie par V. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(V)$ et de la variance de V.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont on note la fonction de répartition F_W. On dit que W suit la *loi de Gumbel*.

2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.
   (b) En déduire que W est une variable à densité, et en donner une densité qu'on notera f_W.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V.
On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

3. (a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est donnée par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   (b) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et en donner une densité f_{Y_n} continue sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\, \mathrm{d}t = x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\, \mathrm{d}t$$

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) = 0$.
   (d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t$$

5. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - e^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u}\, \mathrm{d}u$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

6. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$; on note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.
   (a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.
   (b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que pour n assez grand, $F_{Z_n}(x) = \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n$.
   (d) En déduire, pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x)$.

7. On réalise les imports suivants en Python :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

En Python, la commande `rd.exponential(a,n)` renvoie un `np.array` à n composantes qui sont des tirages indépendants d'une variable suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}\left(\frac{1}{a}\right)$ (et non pas $\mathscr{E}(a)$, attention !!)

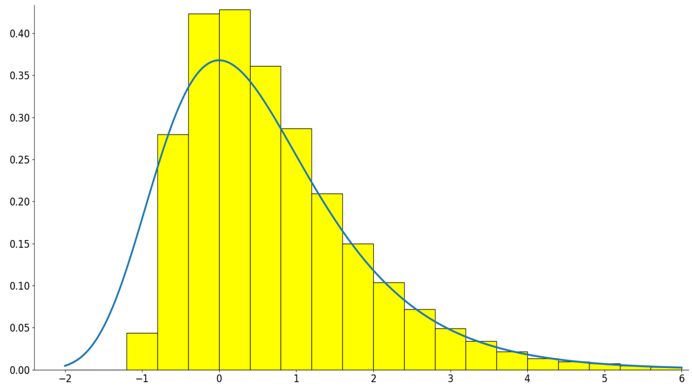
(a) En utilisant `rd.exponential`, écrire une fonction Python d'en-tête `def tirageW(k)` qui renvoie un `np.array` de k tirages indépendants de W. En déduire un moyen d'afficher une valeur approchée de $\mathbb{E}(W)$ (dont on admet l'existence).

(b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def tirageZn(n)` qui renvoie un tirage de Z_n.

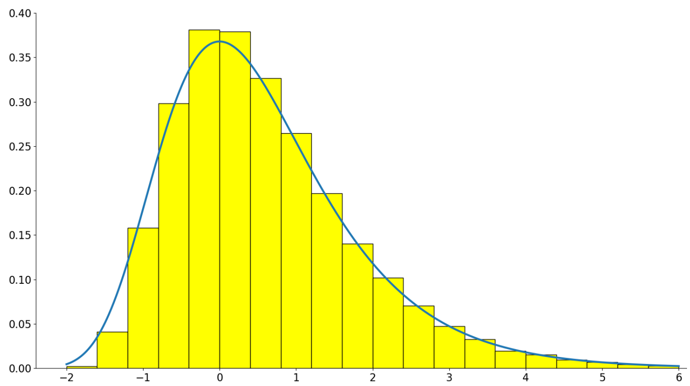
(c) On considère le code suivant :

```python
X=np.linspace(-2,6,1000)
def Gumbel(x):
    return ....

plt.plot(X,Gumbel(X),linewidth=3) # linewidth : épaisseur du trait

n = ...
L=[tirageZn(n) for k in range(100000)]
plt.hist(L,20,density=True)
plt.show()
```

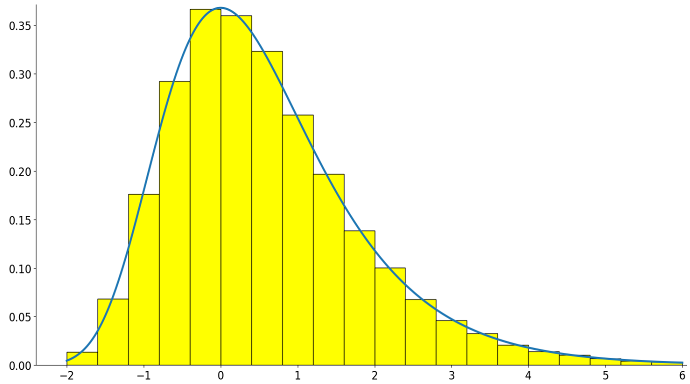
En l'exécutant successivement avec `n`= 3, `n`= 10 et `n`= 50 on obtient les 3 figures suivantes :



$n = 3$



$n = 10$



$n = 50$

Comment interpréter cela ? Quelle est l'expression de la fonction `Gumbel(x)` ?

Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Soit $x \geqslant 0$ fixé.
On considère la fonction φ_x définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, u \geqslant 0,\ \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t$$

3. (a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi_x(u)$.

   (b) Montrer que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^2,\ \ u < v\ \ \Rightarrow\ \ \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\mathrm{d}t$$

   (c) En déduire que φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   (d) On admet que φ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $u \geqslant 0$, admet une unique solution.

On note $\mathrm{U} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, associe $\mathrm{U}(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\displaystyle\int_{x-\mathrm{U}(x)}^{x+\mathrm{U}(x)} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

4. (a) Vérifier : $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, $\mathrm{U}(x) = 1 - x$.

   (b) Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, montrer que : $\varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$, puis : $x - \mathrm{U}(x) \geqslant 0$, et en déduire : $\mathrm{U}(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.

5. (a) Montrer que l'application U est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Dresser le tableau de variations de U, et préciser sa limite en $+\infty$.

6. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \mathrm{U}(a_n) \end{cases}$$

   (a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie, et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

   (b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et montrer que sa limite vaut $\dfrac{1}{2}$.