Concours Blanc n°2
Maths 2 : ESSEC2 2023
Corrigé

On s'intéresse dans ce problème aux processus de Markov finis homogènes à temps continu et on étudie deux exemples de modélisation en lien avec des crédits bancaires.

Le problème comporte quatre parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes de la partie 4 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant 2$. On considère, dans la suite du problème, une famille de variables aléatoires X_t, pour $t \in \mathbb{R}^+$, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, vérifiant les propriétés suivantes :

(H_1) : **Pour tout $t \geqslant 0, X_t(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$.**

(H_2) : **Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $t_1 < t_2 < \ldots < t_r$ des réels positifs, $i_1, \ldots, i_{r+1}$ des éléments de $\{1, \ldots, n\}$ et s un réel positif, si $\mathbb{P}\left([X_{t_1} = i_1] \cap \ldots \cap [X_{t_r} = i_r]\right) \neq 0$,**

$$\mathbb{P}_{[X_{t_1}=i_1]\cap\ldots\cap[X_{t_r}=i_r]}\left(X_{t_r+s} = i_{r+1}\right) = \mathbb{P}_{[X_{t_r}=i_r]}\left(X_{t_r+s} = i_{r+1}\right)$$

(H_3) : **Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction $f_i : t \longmapsto \mathbb{P}(X_t = i)$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et n'est pas la fonction nulle. On note S_i l'ensemble des réels positifs t tels que $f_i(t) \neq 0$.**

(H_4) : **Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, i \neq j$, et pour tout $h \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}\left(X_{t+h} = j\right)$ est constante sur son ensemble de définition S_i et il existe un réel positif que l'on note $\alpha_{i,j}$, tel que, si $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$,**

$$\mathbb{P}_{[X_t=i]}\left(X_{t+h} = j\right) \underset{h\to0}{=} \alpha_{i,j} h + o(h)$$

(H_5) : **Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $h \geqslant 0$, la fonction $t \longmapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}(X_{t+h} = i)$ est constante sur son ensemble de définition S_i et il existe un réel négatif que l'on note $\alpha_{i,i}$, tel que, si $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$,**

$$\mathbb{P}_{[X_t=i]}(X_{t+h} = i) \underset{h\to0}{=} 1 + \alpha_{i,i} h + o(h)$$

Partie 1 - Matrice génératrice et système différentiel associé

On note L_t la matrice ligne d'ordre n, $\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_t = 1) & \ldots & \mathbb{P}(X_t = n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1(t) & \ldots & f_n(t)\end{pmatrix}$ et on note G la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les $\alpha_{i,j}$, appelée matrice génératrice du processus.

On note aussi pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $L'_t = \begin{pmatrix}f'_1(t) & \ldots & f'_n(t)\end{pmatrix}$.
L'objectif des trois premières questions est d'établir que pour tout $t \geqslant 0, L'_t = L_t G$.

1. **Montrer que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $(t, h) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$,**

$$\mathbb{P}\left(X_{t+h} = j\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]\right)$$

   $X_t(\Omega) = [\![1, n]\!]$ donc $\left([X_t = i]\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
   Par probabilités totales on a directement l'égalité demandée.

2. **Soit $i \in \{1, \ldots, n\}, t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$, justifier que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}\left(X_{t+h} = j\right) = 1$. En déduire que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $h \in \mathbb{R}^+$, on a l'égalité :**

$$1 \underset{h\to0}{=} 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + o(h)$$

Si $t \in S_i$ on a $\mathbb{P}(X_t = i) = f_i(t) \neq 0$ ce qui justifie l'existence des probas conditionnelles $\mathbb{P}_{[X_t=i]}(\ldots)$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}\left(X_{t+h} = j\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_t = i)} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_t = i] \cap [X_{t+h} = j]\right) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_t = i)} \mathbb{P}(X_t = i) \qquad \text{(FPT, } \left([X_{t+h} = j]\right)_{j \in [\![1,n]\!]} \text{ est un SCE)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(H_4) et (H_5) donnent :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}\left(X_{t+h} = j\right) &= \mathbb{P}_{[X_t=i]}(X_{t+h} = i) + \sum_{j \neq i} \mathbb{P}_{[X_t=i]}\left(X_{t+h} = j\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 + \alpha_{i,i} h + \sum_{j \neq i} \alpha_{i,j} h + o(h) \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + o(h)
\end{aligned}$$

Ces deux derniers calculs permettent de conclure que

$$1 \underset{h\to 0}{=} 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + o(h)$$

En conclure que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0$.

L'égalité précédente donne, pour $h \to 0$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h \underset{h\to 0}{=} o(h)$$

ce qui est possible ssi $\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) = 0$.

3. (a) **Montrer que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $(t,h) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$, on a alors :**

$$\mathbb{P}\left(X_{t+h} = j\right) \underset{h\to 0}{=} \mathbb{P}\left(X_t = j\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} h + o(h)\right) \mathbb{P}\left(X_t = i\right)$$

On repart d'une FPT :

$$\mathbb{P}\left(X_{t+h} = j\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_t = i] \cap [X_{t+h} = j])$$

Ensuite, pour un certain i, il faut distinguer les cas $\mathbb{P}([X_t = i]) = 0$ et $\mathbb{P}([X_t = i]) \neq 0$.

- Si $\mathbb{P}([X_t = i]) \neq 0$, on passe par la conditionnelle et on utilise encore (H_4) et (H_5) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_t = i] \cap [X_{t+h} = j]) = \mathbb{P}_{[X_t=i]}(X_{t+h} = j) \times \mathbb{P}(X_t = i) &\underset{h\to 0}{=} \mathbb{P}(X_t = i)(\alpha_{i,j} h + o(h)) \quad \text{(si } i \neq j\text{)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathbb{P}(X_t = j)(1 + \alpha_{j,j} h + o(h)) \quad \text{(si } i = j\text{)}
\end{aligned}$$

- Si $\mathbb{P}([X_t = i]) = 0$, $\left([X_t = i] \cap [X_{t+h} = j]\right) \subset [X_t = i]$ donc on a également

$$\mathbb{P}([X_t = i] \cap [X_{t+h} = j]) = 0 = \mathbb{P}(X_t = i)\left([1+]\alpha_{i,j} h + o(h)\right)$$

  (le « 1+ ») étant présent si $i = j$ seulement).

Finalement, pour tous $(t,h) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ et $i \in [\![1,n]\!]$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_t = i] \cap [X_{t+h} = j]) = &\underset{h\to 0}{=} \mathbb{P}(X_t = i)(\alpha_{i,j} h + o(h)) \quad \text{(si } i \neq j\text{)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathbb{P}(X_t = j)(1 + \alpha_{j,j} h + o(h)) \quad \text{(si } i = j\text{)}
\end{aligned}$$

En sommant sur $i \in [\![1,n]\!]$ on obtient bien l'égalité demandée.

(b) **En déduire que pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $t \geqslant 0$ et $h > 0$:**

$$\frac{f_j(t+h)-f_j(t)}{h} \underset{h\to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j} + o(1)$$

L'égalité précédente se réécrit : pour tous $j \in \{1,\dots,n\}$ et $(t,h) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$

$$f_j(t+h) \underset{h\to 0}{=} f_j(t) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j}h + o(h)\right) f_i(t)$$

En passant $f_j(t)$ de l'autre côté et en divisant par h on a ce qu'il faut.

En conclure que $f_j'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j}$.

On fait tendre $h \to 0^+$; par hypothèse f_j est dérivable en t et on obtient donc

$$f_j'(t) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{f_j(t+h)-f_j(t)}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j} + o(1)\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j}$$

(c) **Vérifier $\mathrm{L}_t' = \mathrm{L}_t\mathrm{G}$.**
$\mathrm{L}_t = \begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t)\end{pmatrix}$; $\mathrm{L}_t' = \begin{pmatrix} f_1'(t) & \dots & f_n'(t)\end{pmatrix}$ et $\mathrm{G} = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
On reconnaît dans l'égalité précédente une formule de produit matriciel ; et on a bien $\mathrm{L}_t' = \mathrm{L}_t\mathrm{G}$.

4. ***Probabilité moyenne d'être dans un état.***
Soit $\mathrm{T} > 0$ et $\mathrm{U_T}$ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,\mathrm{T}]$ qui suit la loi uniforme sur cet intervalle.
On pose $\mathrm{Z}_{i,\mathrm{T}} = f_i(\mathrm{U_T})$.
Montrer que $\mathbb{E}\left(\mathrm{Z}_{i,\mathrm{T}}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f_i(t)\,\mathrm{d}t$. On note $e_i(\mathrm{T})$ cette espérance.

C'est un théorème de transfert : $\mathrm{U_T}(\Omega) = [0,\mathrm{T}]$ donc $f_i(\mathrm{U_T})$ admet une espérance ssi l'intégrale

$$\int_0^{\mathrm{T}} f_i(t)d(t)\,\mathrm{d}t$$

converge absolument ; avec d une densité de $\mathrm{U_T}$.
$\mathrm{U_T} \hookrightarrow \mathscr{U}([0,\mathrm{T}])$ donc $d(t) = \frac{1}{\mathrm{T}}$ sur $[0,\mathrm{T}]$ et donc on examine l'intégrale

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

qui est l'intégrale d'une fonction continue (cf.(H_3), elle est dérivable) sur un segment et ne pose donc aucun problème de convergence.
On a bien : $\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{Z}_{i,\mathrm{T}}\right) \text{ existe et vaut } \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f_i(t)\,\mathrm{d}t.}$.

5. **On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $\mathrm{G} = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b\end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels strictement positifs. On pose $p = \frac{b}{a+b}$, $q = 1-p$, $\alpha = f_1(0)$.**

(a) **Montrer que f_1 vérifie l'équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^+$, $y' + (a+b)y = b$.**

On utilise $\mathrm{L}_t' = \mathrm{L}_t\mathrm{G}$.
Ici $n = 2$ donc $\mathrm{L}_t = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) & 1-f_1(t)\end{pmatrix}$
(on remarque en effet que L_t est la matrice ligne donnant la loi de X_t donc la somme des coefficients vaut 1 !!)
et par suite $\mathrm{L}_t' = \begin{pmatrix} f_1'(t) & -f_1'(t)\end{pmatrix}$

$$\mathrm{L}_t' = \mathrm{L}_t\mathrm{G} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1'(t) & -f_1'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) & 1-f_1(t)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b\end{pmatrix}$$

et en examinant la première composante du produit matriciel on trouve notamment :

$$\forall\, t \geqslant 0,\ f_1'(t) = -af_1(t) + b(1 - f_1(t))$$

ce qui se réécrit

$$\forall\, t \geqslant 0,\ f_1'(t) + (a+b)f_1(t) = b$$

ce qui conclut.

(b) **En conclure que pour tout $t \geqslant 0$,**

$$f_1(t) = p + (\alpha - p)\exp(-(a+b)t) \quad \text{et} \quad f_2(t) = q - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)$$

On a une brave EDL du premier ordre...
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \mathrm{K}e^{-(a+b)t}$ où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$;
Et on cherche une solution particulière $y_p : t \mapsto \mathrm{A}$. En injectant il vient $\mathrm{A} = \dfrac{b}{a+b} = p$.

Finalement les solutions de l'équation sont de la forme

$$y : t \mapsto \mathrm{K}e^{-(a+b)t} + p$$

et K est fixé par la condition initiale $f_1(0) = \alpha$. Cette équation donne $\mathrm{K} + p = \alpha$ et donc $\mathrm{K} = \alpha - p$; la solution recherchée est finalement :

$$f_1 : t \mapsto (\alpha - p)e^{-(a+b)t} + p$$

puis

$$f_2 : t \mapsto 1 - f_1(t) = 1 - p - (\alpha - p)e^{-(a+b)t} = q - (\alpha - p)e^{-(a+b)t}$$

(c) **Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+, f_1(t) \in [\min(p,\alpha), \max(p,\alpha)]$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} f_1(t) = p$.**

On sait que $f_1(0) = \alpha$; et avec $-(a+b) < 0$ on a immédiatement $\lim\limits_{t\to+\infty} f_1(t) = p$.
f_1 étant monotone (croissante ou décroissante suivant le signe de $(\alpha - p)$) on a donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, f_1(t) \in [\min(p,\alpha), \max(p,\alpha)]$$

(d) **Déterminer $\lim\limits_{\mathrm{T}\to+\infty} e_1(\mathrm{T})$.**

On remonte en question 4 : $e_i(\mathrm{T}) = \mathbb{E}\left(\mathrm{Z}_{i,\mathrm{T}}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f_i(t)\,\mathrm{d}t$.

On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f_i(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \left((\alpha - p)e^{-(a+b)t} + p\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}}\left((\alpha - p)\int_0^{\mathrm{T}} e^{-(a+b)t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{T}} p\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}}\left(\frac{\alpha - p}{a+b}\left(1 - e^{-(a+b)\mathrm{T}}\right) + p\mathrm{T}\right) \\
&= p + \frac{\alpha - p}{(a+b)\mathrm{T}}\left(1 - e^{-(a+b)\mathrm{T}}\right) \xrightarrow{\mathrm{T}\to+\infty} p
\end{aligned}$$

6. **On suppose dans cette question que $n = 3$ et $\mathrm{G} = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.**

Pour tout $t \geqslant 0$, on note C_t (respectivement C_t') la transposée de la matrice ligne L_t (respectivement L_t').

(a) **Montrer que $\dfrac{-1}{6}, \dfrac{-1}{10}$ et 0 sont des valeurs propres de G.**

On peut tester les inversibilités de $G - \lambda I_3$ pour les trois λ proposés... ou être des petits malins (qui connaissent leur cours !) et s'apercevoir que les vecteurs propres sont donnés juste en-dessous : ce sont les colonnes de P !!
Dès lors, on calcule :

$$G \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ étant non nul, c'est un vecteur propre de G et $0 \in \mathrm{Sp}(G)$. De même, avec

$$G \times \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\1 & -2 & 1\\2 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$G \times \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\1 & -2 & 1\\2 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

on obtient que $-\frac{1}{10}$ et $-\frac{1}{6}$ sont des valeurs propres de G.

(b) **On pose** $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 0\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}$**. Justifier que** $G = \frac{1}{30}P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}P^{-1}$**.**

P est inversible car c'est la matrice de passage de la base canonique vers une famille de 3 vecteurs propres associés à 3 va distinctes, qui est donc une base.
Par formule de changement de base et en reprenant les valeurs propres associées à chaque colonne de G :

$$G = P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -\frac{1}{10} & 0\\0 & 0 & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{30}P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}P^{-1}$$

(c) **Calculer** ${}^tPP$**. En déduire que** $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\1 & -2 & 1\\3 & 0 & -3\end{pmatrix}$**.**

${}^tPP = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$..... et alors ? Cette question est assez vache, il faut des connaissances en algèbre bilinéaire que vous n'avez pas pour comprendre vraiment ce qui se passe.
On voit en fait que si, au lieu de multiplier par ${}^tP$, on multiplie par la matrice obtenue en divisant la première ligne de ${}^tP$ par 3, la seconde par 6 et la troisième par 2, on trouvera bien I_3 ! Dès lors :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\1/6 & -2/6 & 1/6\\1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\1 & -2 & 1\\3 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

(d) **On pose, pour tout** $t \in \mathbb{R}^+, P^{-1}C_t = \begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}$**. Montrer que :**

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \; y_1'(t) = 0\,,\; y_2'(t) = \frac{-1}{10}y_2(t)\,,\; y_3'(t) = \frac{-1}{6}y_3(t)$$

On a $L_t' = L_tG$ donc en transposant $C_t' = {}^tGC_t = GC_t$ car G est symétrique. Ensuite c'est du classique

:

$$\begin{aligned}
\forall\, t \geqslant 0,\ C'_t = GC_t \ &\Leftrightarrow\ C'_t = \frac{1}{30}P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-5\end{pmatrix}P^{-1}C_t\\
&\Leftrightarrow\ P^{-1}C'_t = \frac{1}{30}P^{-1}P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-5\end{pmatrix}P^{-1}C_t \quad \text{(multiplication par } P^{-1} \text{ inversible)}\\
&\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}y'_1(t)\\y'_2(t)\\y'_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-\dfrac{1}{10}&0\\0&0&-\dfrac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et cette dernière forme équivaut bien aux trois équa diff données par l'énoncé.

(e) **En conclure que, pour tout** $t \geqslant 0, C_t = P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta e^{-\frac{1}{10}t}\\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t}\end{pmatrix}$ **où** $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = P^{-1}C_0$**, puis que pour** $i \in \{1,2,3\}$**,** $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{P}(X_t = i) = \dfrac{1}{3}$**.**

Ces trois équations différentielles se résolvent sans problème : il existe (α, β, γ) tels que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+\ y_1(t) = \alpha\ ,\ y_2(t) = \beta e^{-\frac{1}{10}t}\ ,\ y_3(t) = \gamma e^{-\frac{1}{6}t}$$

et on a effectivement $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\\y_3(0)\end{pmatrix} = P^{-1}C_0$.

On voit alors que $\lim\limits_{t\to+\infty}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$; donc $\lim\limits_{t\to+\infty} C_t = P\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$.

Or C_t est la colonne contenant la loi de X_t : donc la somme des composantes de C_t vaut 1 ; propriété conservée par passage à la limite $t \to +\infty$.

On en conclut que $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et on a donc bien

$$\forall\, i \in [\![1,3]\!],\ \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}(X_t = i) = \frac{1}{3}$$

7. ***Temps initial passé dans un état***

On pose pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}, \beta_i = -\alpha_{i,i}$ **et on suppose dans cette question que, si** $\mathbb{P}(X_0 = i) \neq 0$**, alors** $\beta_i \neq 0$**.**

On définit les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ **et** Y **égales, au premier instant** t **où** $X_t \neq i$ **pour** Y_i **et au premier instant** t **où** $X_t \neq X_0$ **pour** Y**.** ***On admet que ces instants existent.*** **Ainsi** Y **est à valeurs dans** $]0\,;+\infty[$ **et si** $X_0 \neq i, Y_i = 0$**.**

Soit i **tel que** $\mathbb{P}(X_0 = i) \neq 0$**. On admet que pour tout** $x > 0$**, lorsque** k **est un entier naturel assez grand** $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) \neq 0$ **et que l'on a:**

$$\mathbb{P}(Y_i > x) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right)$$

(a) **Montrer que pour tout** $x > 0$ **et** $k \in \mathbb{N}^*$**,** k **assez grand :**

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) = \mathbb{P}(X_0 = i)\prod_{j=0}^{k-1}\mathbb{P}_{\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]}\left(X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right) \underset{k\to+\infty}{=} \mathbb{P}(X_0 = i)\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

C'est une formule des probas composées :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) = P(X_0 = i) \times P_{[X_0=i]}(X_{x/k} = i) \times P_{[X_0=i]\cap[X_{x/k}=i]}(X_{2x/k} = i) \times \ldots$$

mais par propriété de Markov (H_2) on sait que dans l'événement qui conditionne, seul le dernier événement de l'intersection compte : ainsi on a par exemple

$$P_{[X_0=i]\cap[X_{x/k}=i]}(X_{2x/k}=i) = P_{[X_{x/k}=i]}(X_{2x/k}=i)$$

La formule des probas composées à écrire se simplifie donc ; elle devient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]\right) = P(X_0=i) &\times P_{[X_0=i]}(X_{x/k}=i)\\ &\times P_{[X_{x/k}=i]}(X_{2x/k}=i)\\ &\times P_{[X_{2x/k}=i]}(X_{3x/k}=i)\times\ldots\\ &\times P_{[X_{(k-1)x/k}=i]}(X_{kx/k}=i)\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]\right) = \mathbb{P}(X_0=i)\prod_{j=0}^{k-1}\mathbb{P}_{\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]}\left(X_{\frac{j+1}{k}x}=i\right)$$

Pour la seconde partie on utilise (H_5) : pour tout $j\in[\![0,k-1]\!]$,

$$\mathbb{P}_{\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]}\left(X_{\frac{j+1}{k}x}=i\right) \underset{k\to+\infty}{=} 1+\alpha_{i,i}\frac{x}{k}+o\left(\frac{x}{k}\right)$$

et les k facteurs du produit sont ainsi identiques ! Avec $\alpha_{i,i}=-\beta_i$ il vient donc

$$\mathbb{P}(X_0=i)\prod_{j=0}^{k-1}\mathbb{P}_{\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]}\left(X_{\frac{j+1}{k}x}=i\right) = P(X_0=i)\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

(le x dans le $o(\,)$ peut être omis car la variable est ici k).

(b) **En déduire que pour tout $x\geqslant 0, \mathbb{P}_{[X_0=i]}(Y_i>x)=e^{-\beta_i x}$. Quelle est la loi de Y_i pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_0=i]}$?**

Avec la limite admise par l'énoncé il s'agit en fait de calculer

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

On connaît la chanson :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k &= \exp\left(k\ln\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right)\\ &\underset{k\to+\infty}{=} \exp\left(k\left(-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right)\\ &\underset{k\to+\infty}{=} \exp\left(-\beta_i x+o(1)\right)\\ &\xrightarrow{k\to+\infty} e^{-\beta_i x}\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(Y_i>x) = \lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]\right) = P(X_0=i)e^{-\beta_i x}$$

Il reste à revenir à la proba conditionnelle. Si $Y_i>x$ cela signifie que le premier instant où le système n'est plus en i est >0 ; ce qui implique qu'il est initialement en i ! Ainsi

$$[Y_i>x] = [Y_i>x]\cap[X_i=0]$$

puis

$$\mathbb{P}_{[X_0=i]}(Y_i>x) = \frac{\mathbb{P}([X_0=i]\cap[Y_i>x])}{P(X_0=i)} = \frac{\mathbb{P}([Y_i>x])}{P(X_0=i)} = e^{-\beta_i x}$$

Ça sent bon la loi $\mathscr{E}(\beta_i)$... mais n'allons pas trop vite :

- Si $x\geqslant 0$, $\mathbb{P}_{[X_0=i]}(Y_i>x)=e^{-\beta_i x}$;
- Si $x<0$, $\mathbb{P}_{[X_0=i]}(Y_i>x)=1$ car Y_i est à valeurs positives.

En passant aux complémentaires :

$$\mathbb{P}_{[X_0=i]}\left(Y_i \leqslant x\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1-e^{-\beta_i x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

et on peut bien conclure que la loi de Y_i pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_0=i]}$ est $\mathscr{E}(\beta_i)$.

(c) **Montrer que pour tout $x \geqslant 0, \mathbb{P}(Y>x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_0 = k\right) e^{-\beta_k x}$.**

Ayant à disposition les lois conditionnelles, on pense bien sûr à une FPT, avec le SCE $\left([X_0=i]\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

$$\forall\, x>0,\ P(Y>x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_0=i]\cap(Y>x)\right)$$

Remarquons alors que si $[X_0=i]$, Y_i (l'instant où on sort de i) et Y (l'instant où on sort de X_0) sont égales.
On a donc

$$\forall\, x>0,\ P(Y>x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_0=i]\cap(Y>x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_0=i]\cap(Y_i>x)\right)$$

Il faut maintenant discuter suivant la non-nullité de $\mathbb{P}([X_0=i])$:

- Si $\mathbb{P}([X_0=i]) \neq 0$:
$$\mathbb{P}\left([X_0=i]\cap(Y_i>x)\right) = \mathbb{P}\left([X_0=i]\cap(Y_i>x)\right)\times\mathbb{P}\left([X_0=i]\right) = \mathbb{P}\left([X_0=i]\right)e^{-\beta_i x}$$
- Si $\mathbb{P}([X_0=i]) = 0$:
$$\mathbb{P}\left([X_0=i]\cap(Y_i>x)\right) = 0 = \mathbb{P}\left([X_0=i]\right)e^{-\beta_i x}$$

On a bien finalement :

$$\forall\, x>0,\ P(Y>x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_0=i]\right)e^{-\beta_i x}$$

(d) **En conclure que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y.**

Y étant à valeurs positives, on a la fonction de répartition suivante

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ F_Y(x) = P(Y\leqslant x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left([X_0=i]\right)e^{-\beta_i x} \text{ si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (composée de telles fonctions).
$F_Y(0) = \lim_{x\to 0}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left([X_0=i]\right)e^{-\beta_i x}\right) = 1-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left([X_0=i]\right) = 0 = \lim_{x\to 0^-} F_Y(x)$ donc on a la continuité en 0 : Y est bien à densité.
On dérive sur $\mathbb{R}^*$ ce qui donne :

$$\forall\, x\neq 0,\ f_Y(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbb{P}\left([X_0=i]\right)e^{-\beta_i x} \text{ si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

et on pose $f_Y(0)=0$.

(e) **On note $I = \left\{k\in\{1,\dots,n\}, \mathbb{P}\left(X_0=k\right)\neq 0\right\}$. Établir que Y admet une espérance égale à $\sum_{k\in I}\frac{\mathbb{P}\left(X_0=k\right)}{\beta_k}$.**

Rien de spécial ici, on examine la cv absolue de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xF_Y(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} P(X_0=i)\underbrace{\int_0^{+\infty}\beta_i x e^{-\beta_i x}\,dx}$$

et on reconnaît dans l'accolade l'intégrale qui donne l'espérance d'une variable suivant $\mathscr{E}(\beta_i)$, qui vaut $\frac{1}{\beta_i}$.
L'intégrale proposée converge donc absolument, et on a

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n}\frac{P(X_0=i)}{\beta_i} = \sum_{i\in I}\frac{P(X_0=i)}{\beta_i}$$

en sortant de la somme les termes d'indice i tel que $P(X_0=i)=0$ (qui sont bien nuls).

Partie 2 - Matrice de transition, lien avec la matrice génératrice

On utilise les notations de la partie 1.

8. ***Définition de la matrice de transition***

   Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ **et** $s \geqslant 0$**, si** $t \in S_i$**, on pose**

$$m_{i,j}(s) = \mathbb{P}_{[X_t=i]}\left(X_{t+s} = j\right)$$

   qui ne dépend pas de t **d'après les hypothèses** (H_4) **et** (H_5)**. On note** $M(s)$ **la matrice d'élément générique** $m_{i,j}(s)$**.**

   (a) **Établir que pour tout** $s \geqslant 0, L_s = L_0 M(s)$**.**

   C'est encore une preuve à base de FPT sur le modèle de la propriété de cours « $V_{n+1} = V_n M$ » .
   Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Avec le SCE $\left([X_0 = i]\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ on peut écrire

$$P(X_s = j) = \sum_{i=1}^{n} P([X_0 = i] \cap [X_s = j])$$

   Si $P([X_0 = i]) \neq 0$:

$$P([X_0 = i] \cap [X_s = j]) = P_{[X_0=i]}([X_s = j]) \times P([X_0 = i]) = m_{i,j}(s) P([X_0 = i])$$

   et cette dernière égalité est encore valable si $P([X_0 = i]) = 0$.

   Donc :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P(X_s = j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}(s) P([X_0 = i])$$

   et on reconnaît comme d'hab notre formule de produit matriciel :

$$L_s = L_0 M(s)$$

   (b) **Soit** $i \in \{1,\dots,n\}, r \in S_i$**. En utilisant la propriété** (H_2) **et en distinguant les cas où** $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k])$ **est nulle ou non, montrer que pour tout** $(j,k) \in \{1,\dots,n\}^2$**,** s **et** t **des réels positifs :**

$$\mathbb{P}\left([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap \left[X_{r+s+t} = j\right]\right) = \mathbb{P}(X_r = i)\, m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

   En déduire que, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ **et** s, t **des réels positifs,**

$$\mathbb{P}\left([X_r = i] \cap \left[X_{r+s+t} = j\right]\right) = \mathbb{P}(X_r = i) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

   Formule des probabilités composées :

   - Si $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) \neq 0$ la formule s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap \left[X_{r+s+t} = j\right]\right) &= \mathbb{P}([X_r = i]) \times \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+s} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_r=i]\cap[X_{r+s}=k]}\left(\left[X_{r+s+t} = j\right]\right) \\
&= \mathbb{P}([X_r = i]) \times \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+s} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_{r+s}=k]}\left(\left[X_{r+s+t} = j\right]\right) \quad \text{avec } (H_2) \\
&= \mathbb{P}([X_r = i]) \times \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+s} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_r=k]}\left(\left[X_{r+t} = j\right]\right) \\
&\quad \text{(avec l'indépendance en } t \text{ dans } (H_4)\text{)} \\
&= \mathbb{P}(X_r = i)\, m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)
\end{aligned}$$

   On écrit ensuite une formule des probas totales avec le SCE $\left([X_{r+s} = k]\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([X_r = i] \cap \left[X_{r+s+t} = j\right]\right) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap \left[X_{r+s+t} = j\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_r = i)\, m_{i,k}(s) m_{k,j}(t) \\
&= \mathbb{P}(X_r = i) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)
\end{aligned}$$

- Si $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) = 0$, $\mathbb{P}\left([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap \left[X_{r+s+t} = j\right]\right)$ est également nulle. Avec $r \in S_i$ on a :

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) = \mathbb{P}(X_r = i)\,\mathbb{P}_{[X_r=i]}(X_{r+s} = k) = \mathbb{P}(X_r = i)\, m_{i,k}(s) = 0$$

et donc

$$\mathbb{P}(X_r = i)\, m_{i,k}(s) m_{k,t}(j) = 0$$

(c) **En conclure que pour tout s et t, des réels positifs, $M(s+t) = M(s)M(t)$.**

$r \in S_i$ donc

$$m_{i,j}(s+t) = \mathbb{P}_{[X_r=i]}\left(X_{r+s+t} = j\right)$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}\left([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]\right) = \mathbb{P}([X_r = i])\, m_{i,j}(s+t)$$

et par ailleurs on vient de voir que

$$\mathbb{P}\left([X_r = i] \cap \left[X_{r+s+t} = j\right]\right) = \mathbb{P}(X_r = i) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

En simplifiant par $\mathbb{P}(X_r = i) \neq 0$ (toujours car $r \in S_i$) on trouve

$$m_{i,j}(s+t) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

Pour tout i, f_i n'est pas la fonction nulle donc on peut tenir le raisonnement précédent.
L'égalité $m_{i,j}(s+t) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$ aut donc pour tous (i,j). On reconnaît une formule de produit matriciel ; on a donc bien

$$M(s+t) = M(s)M(t)$$

(d) **Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel positif, $M(kt) = (M(t))^k$.**

C'est une récurrence assez simple : avec $\mathscr{P}(k)$: « $M(kt) = (M(t))^k$ », $\mathscr{P}(1)$ est évidemment vraie ; et

$$M(kt) = (M(t))^k \;\Rightarrow\; M((k+1)t) = M(kt) + t = M(kt)M(t) = (M(t))^k M(t) = (M(t))^{k+1}$$

où on a utilisé la question précédente avec $s = kt$.

- **Si $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, A une matrice appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, si l'on note $a_{i,j}(k)$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A_k, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de A, alors on écrira $A = \lim_{k\to+\infty} A_k$ si pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $\lim_{k\to+\infty} a_{i,j}(k) = a_{i,j}$.**
  On dit alors que la suite $(A_k)_{k\geqslant 1}$ converge vers A.
- **On admet, dans la suite de cette partie et dans la partie 3 , que pour tout $t \geqslant 0$,**

$$M(t) = \lim_{k\to+\infty} \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k \qquad (**)$$

9. **On veut simuler le processus à partir de la donnée de la matrice G et de L_0. On admet que pour $t \in [0,100]$, on peut considérer que $M(t) = \left(I_n + \dfrac{t}{1000} G\right)^{1000}$.**

   - **On importe des bibliothèques:**
     `numpy as np, numpy.random as rd, matplotlib.pyplot as plt, numpy.linalg as al.`
   - **On rappelle que si M est une matrice, représentée par un tableau `numpy`, `M[:,j]` désigne le vecteur des coefficients de `j`-ème colonne de M, de même pour `M[i,:]` et la `i`-ème ligne de M.**

   (a) **Écrire une fonction Python `transition(t,G)` de paramètres `G` représentant la matrice génératrice carrée d'ordre n et `t` , qui renvoie la matrice $\left(I_n + \dfrac{t}{1000} G\right)^{1000}$.**
   On dispose de la fonction `al.matrix_power` pour le calcul de puissances ; et `np.eye` donne la matrice identité.

```python
def transition(t,G):
    n = len(G) # taille de la matrice carrée G
    return al.matrix_power(np.eye(n)+t/1000*G,1000)
```

(b) **Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction `traceLoi2Xt(G,L0,tmax)` qui trace, sur un même graphique, les graphes des fonctions $t \mapsto \mathbb{P}(X_t = i)$ sur le segment $[0, t_{\max}]$ pour i variant de 1 à n, `G` et `L0` représentant, respectivement, la matrice génératrice du processus et la ligne L_0.**
On utilisera 1000 points pour les graphes.
On peut utiliser : pour tout $h > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $L_{kh} = M(h)L_{(k-1)h}$. On construit donc les L_t de proche en proche, avec $h = \dfrac{t_{max}}{999}$ et $k \in [\![0, 999]\!]$ (donc 1000 points). On range les L_t successifs dans une grande matrice dont les lignes seront $L0, ..., L_{t_{max}}$. Pour les tracés : les $\mathbb{P}(X_t = i)$ où i parcourt les étapes de temps sont dans la i-ème colonne de la matrice ainsi construite.

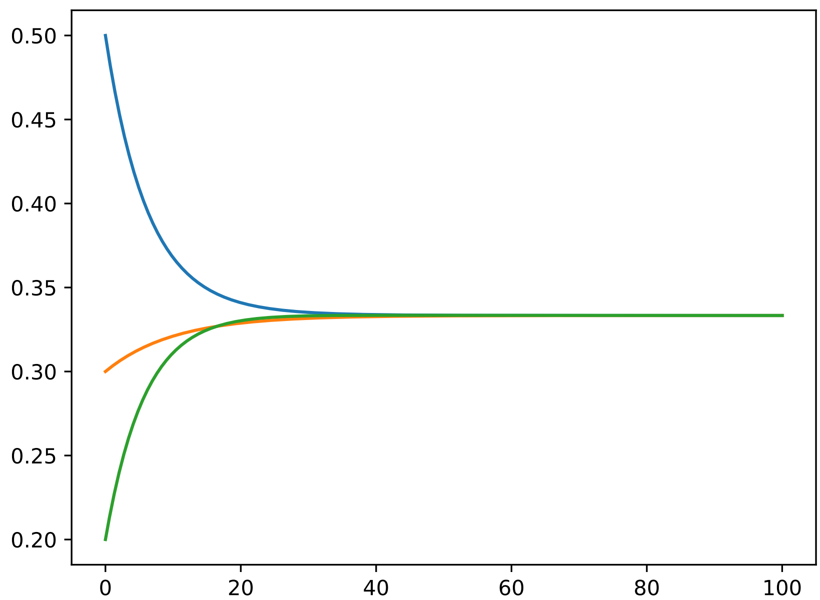
```python
def traceLoi2Xt(G,L0,tmax):
    n = len(G)
    L = np.zeros((1000,n))
    L[0,:]=L0
    M = transition(tmax/999,G)
    for k in range(1,1000):
        L[k,:] = np.dot(L[k-1,:],M)

    T=np.linspace(0,tmax,1000)
    for i in range(n):
        plt.plot(T,L[:,i])
    plt.show()
```

(c) **Si G est la matrice de la partie I, question 6, l'instruction**

`traceLoi2Xt(1/30*np.array([[-3,1,2],[1,-2, 1],[2,1,-3]]),1/10*np.array([5,3,2]),100)`

affiche l'image suivante :



Expliquer en quoi ce graphique est cohérent avec un résultat obtenu précédemment.

On voit que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f_i(t) \simeq 0,33 \simeq \dfrac{1}{3}$: ceci illustre le résultat de la question (6e).

(d) **On veut simuler et représenter, sur un même graphique, les valeurs de $X_0, X_t, \ldots, X_{kt}$, pour tout $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, à partir de la loi de X_0 donnée dans une ligne `L0`. Compléter la fonction suivante pour qu'elle réalise cette tâche :**
On se souvient que les coefficients de $M(t)$ sont les probas conditionnelles :

$$m_{i,j}(t) = \mathbb{P}_{[X_0=i]}\left(X_t = j\right) = \mathbb{P}_{[X_{kt}=i]}\left(X_{(k+1)t} = j\right)$$

On commence par tirer une valeur de X_0 donc la loi de proba est donnée par L_0 ; ensuite, à la j-ème étape, si $[X_{jt} = i]$, la loi de $X_{(j+1)t}$ sera donnée par la $(i-1)$-ème ligne de $M(t)$.
Dans le squelette de programme qui est fourni, la variable `Lt` contiendra la ligne représentant la loi de proba dont il faut se servir pour tirer la valeur suivante.

Il faut ensuite aussi se souvenir comment tirer une variable à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ de loi quelconque : voir le TD sur Markov, on tire un $p \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ et on regarde dans quel segment ce p se situe.

Attention à la ligne `listeDesX.append(j+1)` : le `j` défini à l'issue du `while` n'est pas la valeur de X tirée, mais cette valeur -1 ; ce qui donne en fait l'indice de la ligne de M à utiliser à l'étape suivante.

```python
def simulX(t,k,L0,G):
    listeDesT = [] ; listeDesX = []
    Mt = transition(t,G) ; Lt = L0
    for i in range(k+1):
        listeDesT.append(i*t)
        p = rd.random()
        s = Lt[0]
        j = 1
        while p > s :
            j += 1
            s += Lt[j]
        Lt = Mt[j,:]
        listeDesX.append(j+1)
    plt.plot(listeDesT,listeDesX) (); plt.show()
```

Partie 3 - Deux exemples de modélisations

On conserve les notations des deux premières parties.

10. **On considère trois états pour le recouvrement d'un crédit bancaire après un défaut de paiement et un accord entre le débiteur et l'organisme de crédit sur la somme à recouvrer :**

    - **1 - en cours de recouvrement, lorsque le débiteur est en train de régulariser sa créance;**
    - **2 - recouvré, lorsque le débiteur a honoré la totalité du montant dû;**
    - **3-non recouvré, lorsque l'organisme de crédit considère que l'argent est définitivement perdu.**

    On suppose que la matrice génératrice G du processus de Markov modélisant ce phénomène est $\begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **et** $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**,** α **et** β **étant des réels strictement positifs.**

    (a) **Montrer que pour tout** $i \in \mathbb{N}^*, G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$**.**

    Un calcul direct montre que $G^2 = (-\alpha-\beta)G$.
    On procède ensuite par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: on note $\mathscr{P}(i)$: « $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$ »

    - $\mathscr{P}(1)$ est vraie de manière évidente
    - Si $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$ alors $G^{i+1} = G^i \times G = (-\alpha-\beta)^{i-1}G^2 = (-\alpha-\beta)^i G$ d'après ce qui a été dit sur G^2.

    On a donc initialisation et hérédité ; d'où la conclusion attendue.

    (b) **En déduire que pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$ **et** t **réel :**

    $$\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = I_3 + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1}\right) G$$

    et en déduire que pour tout $t \geqslant 0$,

    $$M(t) = I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G$$

C'est manifestement un binôme de Newton : les matrices I_3 et $\dfrac{t}{k}G$ commutent, donc

$$\begin{aligned}
\left(I_3+\frac{t}{k}G\right)^k &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i G^i (I_3)^{k-i}\\
&= I_3+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1}G \quad \text{(en isolant le terme } k=0)\\
&= I_3+\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1}\right)G \quad \text{(avec la formule obtenue pour } G^i)
\end{aligned}$$

(c) **Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et t réel,**

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1}=\frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}$$

et en déduire que pour tout $t\geqslant 0$,

$$M(t)=I_3+\frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G$$

Et c'est encore une formule du binôme ! Il est peut-être plus pratique de partir de la forme factorisée et de secouer comme il faut :

$$\begin{aligned}
\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^i\\
&= 1+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^i\\
\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k &= 1-(\alpha+\beta)\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1}
\end{aligned}$$

et après quelques manipulations élémentaires sur cette dernière égalité on a le résultat voulu.

On repart ensuite de la formule $(**)$:

$$M(t)=\lim_{k\to+\infty}\left(I_n+\frac{t}{k}G\right)^k$$

La conjonction des deux derniers calculs fournit :

$$\begin{aligned}
\left(I_3+\frac{t}{k}G\right)^k &= I_3+\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1}\right)G\\
&= I_3+\frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}G
\end{aligned}$$

Avec les règles de calcul sur les limites de suites à valeurs matricielles il suffit maintenant de calculer $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1-(\alpha+\beta)\dfrac{t}{k}\right)^k$.
Limite usuelle, déjà démontrée en question 7b :

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k=\exp(-(\alpha+\beta)t)$$

et on a donc finalement :

$$M(t)=\lim_{k\to+\infty}\left(I_3+\frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}G\right)=I_3+\frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G$$

(d) **En conclure que pour tout $t \geqslant 0$:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t = 1) &= \exp(-(\alpha+\beta)t) \\
\mathbb{P}(X_t = 2) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t)) \\
\mathbb{P}(X_t = 3) &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t))
\end{aligned}$$

On utilise le fait que M est la matrice de transition : $\forall\, t \geqslant 0$, $L_t = L_0 M(t)$; avec $L_t = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_t=1) & \mathbb{P}(X_t=2) & \mathbb{P}(X_t=3)\end{pmatrix}$, et

$$\begin{aligned}
M(t) &= I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}-\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\exp(-(\alpha+\beta)t) & \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t)) & \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comme $L_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, L_t est la première ligne de $M(t)$: on a bien les expressions voulues.

(e) **En utilisant les résultats de la question 7 de la partie I, montrer que le temps aléatoire passé en recouvrement suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha+\beta$.**

Ensuite comme $[X_0 = 1]$, le temps aléatoire passé en recouvrement est égal à Y_1 (le conditionnement par $[X_0 = 1]$ est ici indifférent car $[X_0 = 1]$ est de probabilité 1).
D'après la question 7b, $Y_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\beta_1)$ où $\beta_1 = -\alpha_{1,1}$ est l'opposé du coefficient $(1,1)$ de G : on a bien $\beta_1 = \alpha+\beta$ et on conclut.

11. **On distingue, pour l'accès au crédit d'une organisation, trois niveaux de solvabilité :**

- **1 - niveau C ;**
- **2 - niveau B ;**
- **3- niveau A.**

On suppose que ce niveau évolue dans le temps suivant un processus de Markov avec $G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ 4\alpha & 0 & -4\alpha\end{pmatrix}$ **et** $L_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha > 0$. **On note aussi** $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

(a) **On admet que** $A^3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}-3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60\end{pmatrix}$. **Calculer** $A^3 - 2A^2 + A$ **(on explicitera** A^2 **). Que peut-on dire du polynôme** $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$ **?**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ **et** $k \in \mathbb{N}^*$**, on admet qu'il existe un polynôme** Q **et des réels** a, b, c **tels que, pour tout** x **réel :**

$$\left(1 + \frac{\theta}{k}x\right)^k = Q(x)U(x) + ax^2 + bx + c \qquad (*)$$

On trouve $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16\end{pmatrix}$ et après calculs pénibles (attention aux facteurs devant les matrices A, A^2, A^3) on arrive à $A^3 - 2A^2 + A = 0$.
Ainsi le polynôme $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$ est annulateur de A.
On admet alors la division euclidienne.

(b) **Déterminer une factorisation de** $U(x)$ **et en déduire que** $c = 1$ **et** $\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k = a+b+c$**.**

On cherche des racines évidentes de U. Assez clairement

$$U(x) = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$$

donc $U(0) = U(1) = 0$.
En substituant $x = 0$ dans $(*)$ pour obtenir $c = 1$; et avec $x = 1$:
$\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k = a+b+c$

(c) **En dérivant la relation** $(*)$**, montrer que** $\theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a+b$**.**

En déduire que $a = \theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k + 1$ **et** $b = 2\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2$**.**

En dérivant $\left(1+\frac{\theta}{k}x\right)^k = Q(x)x(x-1)^2 + ax^2+bx+c$ on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \theta\left(1+\frac{\theta}{k}x\right)^{k-1} = Q'(x)x(x-1)^2 + Q(x)(x-1)^2 + 2Q(x)x(x-1) + 2ax+b$$

et en injectant $x =$ dans celle-ci :

$$\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a+b$$

En posant $e = \left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k$ et $f = \theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^{k-1}$ on obtient le système $\begin{cases} c = 1 \\ a+b+c = e \\ 2a+b = f \end{cases}$ ce qui donne après traitement

$$\begin{cases} a = f-e+1 \\ b = 2e-f-2 \\ c = 1 \end{cases}$$

et la réponse attendue.

(d) **En conclure que pour tout** $t \geqslant 0$**,**

$$M(t) = \left(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\right)A^2 + \left((2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2\right)A + I_3$$

puis préciser la loi de X_t**.**

On substitue cette fois « $x = G$ » dans $(*)$ (oui c'est une matrice, mais on sait qu'on peut prendre des polynômes d'une matrice et que toutes les propriétés souhaitables fonctionnent)

$$\left(I_3+\frac{\theta}{k}A\right)^k = Q(A)U(A) + aA^2+bA+cI_3 = aA^2+bA+cI_3$$

la dernière égalité car U est annulateur de A.
On a donc

$$\begin{aligned}\left(I_3+\frac{\theta}{k}A\right)^k &= aA^2+bA+cI_3 = \\ &= \left(\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k + 1\right)A^2 + \left(2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2\right)A + I_3\end{aligned}$$

Or $G = -\alpha A$ et

$$M(t) = \lim_{k\to+\infty}\left(I_n+\frac{t}{k}G\right)^k = \lim_{k\to+\infty}\left(I_n-\frac{\alpha t}{k}A\right)^k$$

donc il « suffit » de remplacer $\theta = -\alpha t$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(t) &= \lim_{k\to+\infty}\left(-\alpha t\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1}-\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k}+1\right)\mathrm{A}^2+\left(2\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k}+\alpha t\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1}-2\right)\mathrm{A}+\mathrm{I}_3\\
&= \left(-\alpha t e^{-\alpha t}-e^{-\alpha t}+1\right)\mathrm{A}^2+\left(2e^{-\alpha t}+\alpha t e^{-\alpha t}-2\right)\mathrm{A}+\mathrm{I}_3
\end{aligned}$$

avec comme toujours $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{k}\right)^k = e^a$ (et $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{k}\right)^{k-1} = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{k}\right)^k\left(1+\dfrac{a}{k}\right)^{-1} = e^a$).

Enfin $\mathrm{L}_t = \mathrm{L}_0\mathrm{M}(t)$ est la première ligne de $\mathrm{M}(t)$ et en calculant

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(t) &= \left(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\right)\mathrm{A}^2+\left((2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2\right)\mathrm{A}+\mathrm{I}_3\\
&= \frac{1}{9}\left(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\right)\begin{pmatrix}1&-2&1\\ \dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\left((2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2\right)\begin{pmatrix}1&-1&0\\ \dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\ \dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{9}\left(4+(5+2\alpha t)e^{-\alpha t}\right) & \frac{1}{9}\left(4-(4+\alpha t)e^{-\alpha t}\right) & \frac{1}{9}\left(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\right)\\ \dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ces trois coefficients valent respectivement $\mathbb{P}(\mathrm{X}_t=1)$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_t=2)$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_t=3)$.

Partie 4 - Démonstration de l'égalité (**) admise dans la partie 2

On utilise les notations et définitions des deux premières parties.

- **On définit pour** $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ **appartenant à** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|\mathrm{A}\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)$ **c'est-à-dire la plus grande valeur que prend** $\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|$ **lorsque** i **décrit** $\{1,\dots,n\}$**.**
- **On admet que si** $(\mathrm{A}_k)_{k\geqslant 1}$ **est une suite de matrices appartenant à** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ **et** A **appartenant aussi à** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$**,** $\mathrm{A} = \lim\limits_{k\to+\infty}\mathrm{A}_k$ **si et seulement si** $\lim\limits_{k\to+\infty}\|\mathrm{A}_k-\mathrm{A}\| = 0$**.**

12. ***Un exemple.***
Si $\mathrm{A} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-4&0&2\end{pmatrix}$**, montrer que** $\|\mathrm{A}\| = 2$**.**

On somme les valeurs absolues des coefficients pour chaque ligne ; et on retient la somme maximale.
Avec la matrice A donnée :

- $\left|\dfrac{1}{3}\right|(|1|+|-1|+|1|) = 1$;
- $\left|\dfrac{1}{3}\right|(|0|+|1|+|-1|) = \dfrac{2}{3}$;
- $\left|\dfrac{1}{3}\right|(|-4|+|0|+|2|) = 2$

et on trouve bien $\|\mathrm{A}\| = 2$.

13. **Soit** $t \geqslant 0$**.**

(a) **Établir** $\|\mathrm{M}(t)\| = 1$**.**

Les $m_{i,j}(t) = \mathbb{P}_{[\mathrm{X}_u=i]}\left(\mathrm{X}_{u+t}=j\right)$ sont des probas conditionnelles ; donc positives.
La somme des valeurs absolues des coefficients de la ligne i vaut

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbb{P}_{[\mathrm{X}_u=i]}\left(\mathrm{X}_{u+t}=j\right)\right)$$

et cette somme vaut 1 car $\left(\left(X_{u+t}=j\right)\right)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est un SCE (la proba conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_u=i]}$ est une probabilité donc cette propriété fonctionne).
Ainsi toutes les sommes valent 1, et $\|M(t)\| = \max(1,1,\dots,1) = 1$.

(b) **En utilisant la question 2 de la partie 1 , montrer que pour $k\in\mathbb{N}^*$ assez grand, $\left\|I_n+\frac{t}{k}G\right\|=1$.**

Le coefficient (i,j) de la matrice $I_n+\frac{t}{k}G$ est

$$a_{i,j}=\begin{cases}1+\alpha_{i,i}\dfrac{t}{k} & \text{si } i=j\\ \alpha_{i,j}\dfrac{t}{k} & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

On somme ... les valeurs absolues ! Les coefficients hors diagonale sont positifs ($\alpha_{i,j}\geqslant 0$ si $i\neq j$) et les coefficients diagonaux tendent vers 1 pour $k\to+\infty$ donc seront positifs pour k assez grand.
Si on se place à k grand, il faut alors calculer les sommes des coefficients de chaque ligne.
Pour la ligne i on obtient :

$$S_i=1+\alpha_{i,i}\frac{t}{k}+\sum_{j\neq i}\alpha_{i,j}\frac{t}{k}=\frac{t}{k}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}=1$$

car $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}=0$ d'après la question 2.

14. **Soient $A=\left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=\left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.**

(a) **Établir que $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$.**
L'inégalité triangulaire donne, à i et j fixés :

$$|a_{i,j}+b_{i,j}|\leqslant|a_{i,j}|+|b_{i,j}|$$

En sommant sur j (à i fixé)

$$\forall\, i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}(|a_{i,j}+b_{i,j}|)\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\leqslant\|A\|+\|B\|$$

car $\|A\|$ est la valeur maximale des sommes $\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$.

Les sommes sur chaque ligne de $A+B$ sont majorées par la quantité (fixe) $\|A\|+\|B\|$ donc la valeur maximale prise par ces sommes l'est aussi :

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$$

(b) **Montrer que $\|A\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|$.**

Toutes les $\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|$ sont positives, donc la plus grande d'entre elles est inférieure ou égale à la somme de toutes ces sommes. On a donc :

$$\|A\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)$$

(c) **Démontrer que, $\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$ puis que pour tout entier naturel n, $\|A^n\|\leqslant\|A\|^n$.**

Notons $C=AB$; on a alors $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$. En sommant sur une ligne et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}|=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\times|b_{k,j}|$$

Or on a aussi

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,k}|\times|b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,k}|\times|b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\sum_{j=1}^{n}|b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\mathrm{S}_k$$

où S_k est la somme des valeurs absolues des coeff de la k-ème ligne de B ; cette somme est inférieure à $\|\mathrm{B}\|$. On continue avec le même argument sur $\|\mathrm{A}\|$:

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}| \leqslant \|\mathrm{B}\| \underbrace{\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|}_{\leqslant\|\mathrm{A}\|} \leqslant\leqslant \|\mathrm{A}\| \leqslant \|\mathrm{B}\|$$

$\|\mathrm{C}\|$ étant la valeur maximale des $\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}|$ on a bien

$$\|\mathrm{C}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\,\|\mathrm{B}\|$$

Une récurrence simple montre ensuite que $\forall\, n, \|\mathrm{A}^n\| \leqslant \|\mathrm{A}\|^n$.

(d) **Vérifier que pour tout $k\in\mathbb{N}^*, \mathrm{A}^{k+1}-\mathrm{B}^{k+1} = \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^k-\mathrm{B}^k\right)+(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{B}^k$.**

Calcul direct, il suffit de développer à droite.

(e) **On pose $c = \max(\|\mathrm{A}\|, \|\mathrm{B}\|)$. Montrer, par récurrence sur k, que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,**

$$\left\|\mathrm{A}^k-\mathrm{B}^k\right\| \leqslant kc^{k-1}\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|$$

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$: « $\left\|\mathrm{A}^k-\mathrm{B}^k\right\| \leqslant kc^{k-1}\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|$ » .
La propriété est vraie de manière évidente au ran 1.
Si on suppose pour un $k\in\mathbb{N}^*$ fixé que $\left\|\mathrm{A}^k-\mathrm{B}^k\right\| \leqslant kc^{k-1}\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|$ alors avec les propriétés montrées précédemment :

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{A}^{k+1}-\mathrm{B}^{k+1}\right\| = \left\|\mathrm{A}\left(\mathrm{A}^k-\mathrm{B}^k\right)+(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{B}^k\right\| &\leqslant \left\|\mathrm{A}\left(\mathrm{A}^k-\mathrm{B}^k\right)\right\| + \left\|(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{B}^k\right\| \\ &\leqslant \|\mathrm{A}\|\left\|\mathrm{A}^k-\mathrm{B}^k\right\| + \|(\mathrm{A}-\mathrm{B})\|\left\|\mathrm{B}^k\right\| \\ &\leqslant \|\mathrm{A}\|\left\|\mathrm{A}^k-\mathrm{B}^k\right\| + \|(\mathrm{A}-\mathrm{B})\|\,\|\mathrm{B}\|^k \\ &\leqslant c\times kc^{k-1}\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\| + \|(\mathrm{A}-\mathrm{B})\|\,c^k \\ &= (k+1)c^k\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|\end{aligned}$$

ce qui montre l'hérédité et achève la récurrence.

15. **Soit t un réel positif et $k\in\mathbb{N}^*$.**

(a) **Justifier que** $\left\|\mathrm{M}\left(\frac{t}{k}\right)-\left(\mathrm{I}_n+\frac{t}{k}\mathrm{G}\right)\right\| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$.

Par (H_4) et (H_5), les coefficients de $\mathrm{M}(t/k)$ sont égaux à $\alpha_{i,j}\frac{t}{k}+o(1/k)$ si $i\neq j$ et $\alpha_{i,j}\frac{t}{k}+o(1/k)$ si $i=j$; ceux de $\mathrm{I}_n+\frac{t}{k}\mathrm{G}$ sont égaux à $\alpha_{i,j}\frac{t}{k}$ si $i\neq j$ et $\alpha_{i,j}\frac{t}{k}$ si $i=j$.

Ainsi tous les coefficients de la matrice $\mathrm{M}\left(\frac{t}{k}\right)-\left(\mathrm{I}_n+\frac{t}{k}\mathrm{G}\right)$ sont en $o(1/k)$; donc toutes les sommes (finies !) sur les lignes aussi ; donc la plus grande de ces sommes aussi.

On a donc bien

$$\left\|\mathrm{M}\left(\frac{t}{k}\right)-\left(\mathrm{I}_n+\frac{t}{k}\mathrm{G}\right)\right\| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$$

(b) **Montrer que pour tout k assez grand,**

$$\left\|\mathrm{M}\left(\frac{t}{k}\right)^k-\left(\mathrm{I}_n+\frac{t}{k}\mathrm{G}\right)^k\right\| \leqslant k\left\|\mathrm{M}\left(\frac{t}{k}\right)-\left(\mathrm{I}_n+\frac{t}{k}\mathrm{G}\right)\right\|$$

On veut appliquer $\left\|A^k - B^k\right\| \leqslant kc^{k-1}\|A-B\|$ et on aimerait bien que $c = 1$ ...
Or $\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)\right\| = 1$ (13a) et on a vu que pour $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand, $\left\|I_n + \dfrac{t}{k}G\right\| = 1$.

On a ainsi $\max\left(\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)\right\|, \left\|I_n + \dfrac{t}{k}G\right\|\right) = 1$ et on peut conclure.

(c) **En conclure que** $M(t) = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(I_n + \dfrac{t}{k}G\right)^k$.

Avec $\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| \leqslant k\left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\|$ et $\left\|M\left(\dfrac{t}{k}\right) - \left(I_n + \dfrac{t}{k}G\right)\right\| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ on conclut que

$$\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| \underset{k\to+\infty}{=} o(1)$$

ce qui donne

$$\lim_{k\to+\infty}\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| = 0$$

Or on sait que $M\left(\frac{t}{k}\right)^k = M\left(k\frac{t}{k}\right) = M(t)$; et donc

$$\lim_{k\to+\infty}\left\|M(t) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| = 0$$

Avec la propriété admise en début de partie 4 ceci suffit à conclure que

$$M(t) = \lim_{k\to+\infty}\left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k$$