ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Programme de colle n°18
Semaine du 10/03

Variables aléatoires à densité ; compléments (convergences, approximations)

Attention : en cohérence avec l'étude des intégrales impropres, seules les densités admettant des limites finies à gauche et à droite en tout réel sont au programme.

Variables à densité

Reprise du programme précédent.

Compléments sur la loi normale

- Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$: expression de la densité usuelle, valeurs de l'espérance et de la variance. Utilisation de ces valeurs pour décider de la convergence et de la valeur de certaines intégrales.
- Propriétés de la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$ (notée Φ par convention) : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1-\Phi(x)$; $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.
- Stabilités :
  1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $aX+b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2)$;
  2. En particulier : on peut « centrer-réduire » une variable suivant une loi normale : si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
  3. Si les X_i sont mutuellement indépendantes, avec $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Inégalités

- Inégalité de Markov pour une variable positive admettant une espérance.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable admettant une variance.

(démonstrations non exigibles).

Loi faible des grands nombres

- Suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (notation : iid).
- Moyenne empirique : si $(X_1,\dots,X_n)$ sont n variables aléatoires, leur moyenne empirique est $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  Espérance et variance de la moyenne empirique de n variables iid (dans le cas d'existence de ces quantités). $\mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right) = m$; $V\left(\overline{X_n}\right) = \dfrac{v}{n}$ où m (resp. v) est l'espérance (resp. variance) des X_i.
  Ceci doit être redémontré.

- Loi faible des grands nombres :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}(X)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$
(la terminologie de convergence en probabilité n'est pas au programme).

Convergence en loi

- Définition : (X_n) converge en loi vers X (notation : $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$) si, en tout point x où la fonction de répartition F_X est continue, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$
- Dans le cas où (X_n) et X sont discrètes, équivalence avec :
$$\forall x \in X(\Omega),\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x)$$
- NB : en vue de démontrer certaines convergences en loi, les étudiants doivent connaître sans hésitation la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{R}$.

Informatique

Utilisation du package `numpy.random` (importé avec l'alias `rd`) pour des simulations de lois à densité :

- `rd.random()` renvoie une simulation d'une variable $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$;
- `rd.uniform(a,b)` renvoie une simulation d'une variable $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$;
- `rd.exponential(a)` renvoie une simulation d'une variable $X \hookrightarrow \mathscr{E}\left(\frac{1}{a}\right)$;
- `rd.normal(m,sigma)` renvoie une simulation d'une variable $X \hookrightarrow \mathscr{N}\left(m,\sigma^2\right)$.

On peut ajouter à ces commandes un argument `n` (resp. un couple `(n,p)`) ; le résultat est alors un `np.array()` de taille `n` (resp. une matrice de taille `(n,p)`) dont les coefficients sont des simulations indépendantes de la loi indiquée.

Par exemple `rd.normal(0,1,(2,2))` renverra une matrice 2×2 dont les coefficients sont des tirages de 4 variables indépendantes suivant $\mathscr{N}(0,1)$.

À partir de vendredi : **Théorème Central Limite**

- Définition de la moyenne centrée réduite de n variables iid d'espérance m et de variance $V = \sigma^2$:
$$\overline{X_n}^* = \frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)}{\sqrt{V\left(\overline{X_n}\right)}} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma}\right)$$
- TCL : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables iid admettant une variance, la suite $\left(\overline{X_n}^*\right)$ converge en loi vers une variable suivant $\mathscr{N}(0,1)$.
- Conséquences :
  - à « n grand » , approximation de la loi de $\overline{X_n}$ par une loi normale.
  - Sous certaines conditions sur les paramètres, on a les approximations suivantes :
    - ⋆ $\mathscr{B}(n,p) \simeq \mathscr{N}(np,npq)$
    - ⋆ $\mathscr{P}(\lambda) \simeq \mathscr{N}(\lambda,\lambda)$.

  L'énoncé devra faire remarquer : « on admet qu'on peut approximer la loi … par une loi normale » .