Compléments de probabilités
Exercices

Dans toute cette feuille, on note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On en donne un tableau de valeurs à la fin de la feuille.

Convergences en loi

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires iid, de loi commune $\mathcal{B}(p)$ (avec $p\in]0,1[$). On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ T_n=\prod_{i=1}^{n} X_i$.

1. Donner la loi de T_n.
2. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable constante égale à 0.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires iid, de loi $\mathcal{U}([0,1])$. On pose :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ I_n=\min(X_1,\dots,X_n) \quad\text{et}\quad S_n=\max(X_1,\dots,X_n)$$

On a vu dans le TD précédent que les fonctions de répartition de I_n et S_n sont :

$$F_{I_n}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 1-(1-x)^n \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases} \qquad\text{et}\qquad F_{S_n}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ x^n \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$$

1. Montrer que (I_n) converge en loi vers une variable constante égale à 0.
2. Montrer que (S_n) converge en loi vers une variable constante égale à 1.
3. Reprendre l'exercice avec les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid, de loi $\mathcal{U}([a,b])$

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ X_n\hookrightarrow\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{n}\right)$.

1. Exprimer, pour tout réel t, $F_{X_n}(t)$ en fonction de Φ.
2. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire constante égale à 0.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de va indépendantes, telles que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ X_n\hookrightarrow\mathcal{E}\left(\frac{1}{n}\right)$.
On note $Z_n=X_n-\lfloor X_n\rfloor$ (partie fractionnaire de X_n).
On a déjà vu, dans la feuille sur les variables à densité (exercice 9), que :

$$\forall\, x\in[0,1],\ P(Z_n\leqslant x)=\frac{1-e^{-x/n}}{1-e^{-1/n}}$$

Montrer que (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant $\mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 5. On considère une urne constituée de $2n$ boules ($n \geqslant 2$), dont la moitié sont noires, et l'autre moitié sont blanches. On pioche dans cette urne deux boules successivement et sans remise, et on note X_n le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant la loi binomiale $\mathscr{B}\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.
3. Interpréter ce résultat.

Exercice 6. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables iid suivant la loi $\mathscr{U}([0,\theta])$ avec $\theta > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$X_n = \max(U_1, \dots, U_n)$$

1. Déterminer la fonction de répartition de X_n.
2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que
$$\mathbb{P}\big(|X_n - \theta| > \varepsilon\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \geqslant \theta \\ \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n & \text{si } \varepsilon < \theta \end{cases}$$
   (b) En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|X_n - \theta| > \varepsilon\big) = 0$$
3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = n(\theta - X_n)$.
   (a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.
   (b) Montrer que, si $t \in [0, \theta n]$:
$$F_{Y_n}(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{\theta n}\right)^n$$
   (c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $t \in [0, \theta n]$.
   (d) En déduire que Y_n converge en loi vers une variable Y de loi $\mathscr{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$.

Exercice 7.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire S_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
En utilisant le théorème central limite, calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([S_n \leqslant np]\big)$.

Exercice 8.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, \dots, X_k$ des v.a. indépendantes suivant la loi de Poisson $\mathscr{P}(5)$. On pose $Y_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$.

1. Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(Y_k)$ et $V(Y_k)$.
2. Justifier l'existence d'un unique réel $t_0 > 0$ qui vérifie $\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 0,99$.
3. Établir que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[Y_k - 5k > t_0\sqrt{5k}\right]\right) = 0,01$.

Exercice 9. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires iid de loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1. Quelle est la loi suivie par S_n ? Donner son espérance et sa variance.

2. (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante K_ε telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{K}_\varepsilon}{n}$$

   (b) En déduire que pour tout réel r vérifiant $0 < r < \frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{n^r}\right]\right) = 0$.

3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème central limite, que $\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)$ admet une limite non nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. Soit $n \geqslant 2$, et $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n$ iid suivant $\mathscr{G}(p)$ (avec $p \in]0,1[$). On pose $\mathrm{M}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Z}_i$.

1. Donner l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n.
2. Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(-\sigma_n \leqslant \mathrm{M}_n - m \leqslant \sigma_n\big)$, et donner sa valeur en fonction de $\int_{-1}^{1} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 11. Soit $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ iid suivant $\mathscr{E}(1)$. On pose $\overline{\mathrm{X}_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$, et $\mathrm{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\overline{\mathrm{X}_n} - 1\right)$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{\mathrm{X}_n} - 1| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.
2. On note F_n la fonction de répartition de X_n^*.
   (a) Donner, pour $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{F}_n(x)$.
   (b) À l'aide de la table donnée en annexe, donner une valeur approchée de $\Phi(2)$. Calculer, pour n assez grand, une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{\mathrm{X}_n} \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$.

Estimations

Exercice 12 (Sondage)**.** Dans une population, une proportion $p \in]0,1[$ de personnes souhaitent voter pour le candidat A aux prochaines élections. On choisit un échantillon de n individus ; on pose les variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ telles que $\mathrm{X}_i = 1$ ssi l'individu i vote pour le candidat A. On considère alors que les X_i sont iid, de loi $\mathscr{B}(p)$.

1. Donner la variable aléatoire qui mesure la proportion d'individus votant pour le candidat A dans l'échantillon considéré. On note M_n cette variable.
2. Donner $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n)$ et $\mathrm{V}(\mathrm{M}_n)$.

On cherche à mesurer la taille de l'échantillon à considérer pour avoir une bonne estimation de la proportion p.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}\left(|\mathrm{M}_n - p| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$; puis que $\mathbb{P}\left(|\mathrm{M}_n - p| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
4. Comment choisir n pour que M_n soit voisin de p à 0,01 près, avec une probabilité supérieure à 0,95 ?
5. On cherche maintenant à estimer cette probabilité en utilisant le TCL. On suppose $p = \frac{1}{2}$.
   Montrer que, pour n assez grand, $\mathbb{P}\left(\left|\mathrm{M}_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0{,}01\right) \simeq 2\Phi\left(0{,}01 \times \sqrt{4n}\right) - 1$. Donner, à partir de cette dernière égalité, une valeur de n pour laquelle $\mathbb{P}\left(\left|\mathrm{M}_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0{,}01\right) \simeq 0{,}05$.

Exercice 13. Un vendeur de journaux propose au choix deux quotidiens A et B. Il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B. Chaque client demande soit A, soit B avec la probabilité 0,5. Les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres.
60 clients se présentent dans une journée. On note x la probabilité de l'événement : «le vendeur ne satisfait pas toutes les demandes dans la journée».

1. Déterminer la loi de Y, nombre de clients demandant A dans la journée.
2. Exprimer x à l'aide de Y.
3. Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x.
4. En approchant la loi de Y par une loi normale, exprimer x à l'aide de la fonction Φ.

Approximations de lois

Exercice 14. On modélise le nombre de clients par jour dans un magasin par une variable suivant une loi de Poisson de paramètre 10. On suppose que les variables associées aux différents jours sont mutuellement indépendantes. On cherche à estimer la probabilité qu'en 20 jours, le magasin ait plus de 180 clients.

1. Soient $X_1, \dots, X_{20}$ les va donnant le nombre de clients aux différents jours. Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(X_i)$ et $V(X_i)$.
2. Soit $\overline{X} = \dfrac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i$ la moyenne empirique des X_i. Donner l'espérance et la variance de $\overline{X}$. En déduire l'expression de la moyenne centrée réduite, notée $\overline{X}^*$.
3. Exprimer l'événement $\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \geqslant 180\right)$ comme un événement portant sur $\overline{X}^*$.
4. En déduire qu'une valeur approchée de la probabilité recherchée est $\Phi\left(\sqrt{2}\right)$. Donner cette valeur approchée.

Exercice 15. Dans un jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec probabilité $\dfrac{1}{10}$, perdue avec probabilité $\dfrac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties ($N \geqslant 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
2. Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.
3. La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi normale.
   (a) Donner les paramètres de cette loi normale.
   (b) À l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins 50 euros ?
   On donne : $\dfrac{8\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \simeq 1,148$.
4. On décide maintenant d'approcher X_{60} par une loi de Poisson.
   D'après le cours, on a la convergence en loi pour $n \to +\infty$: si $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$ où $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.
   On admet que ceci implique que, sous certaines conditions sur les paramètres, on peut approximer $\mathscr{B}(n, p)$ par $\mathscr{P}(np)$.
   À l'aide de la table fournie ci-dessous, donner une nouvelle approximation de la probabilité que le joueur perde moins 50 euros.

Table de Poisson donnant les probabilités cumulées : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$

k	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009
1	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073
2	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296
3	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818
4	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730
5	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007
6	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497
7	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987
8	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291
9	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305
10	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015
11	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467
12	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730
13		0,9999	0,9993	0,9964	0,9872
14		1,0000	0,9998	0,9986	0,9943
15			0,9999	0,9995	0,9976
16			1,0000	0,9998	0,9990
17				0,9999	0,9996
18				1,0000	0,9999
19					1,0000
20					

Tableau de valeurs de Φ

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	**0.9236**	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Exemple de lecture : $\Phi(1,43)\simeq 0,9236$ (en gras).