Fonctions à deux variables
Exercices

Exercice 1. (*)
Pour les fonctions suivantes :

- donner le domaine de définition ;
- le représenter graphiquement si ce n'est pas $\mathbb{R}^2$ entier (on admettra que c'est, dans chaque cas, un ensemble ouvert) ;
- donner l'expression du gradient en (x, y) ;
- déterminer les éventuels extremums locaux.

1. $f(x, y) = xy(x + y - 1)$.
2. $g(x, y) = x\left(\left(\ln(x)\right)^2 + y^2\right)$
3. $k(x, y) = e^{x^2+y^2} - x^2 - 2y^2$.

Exercice 2. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

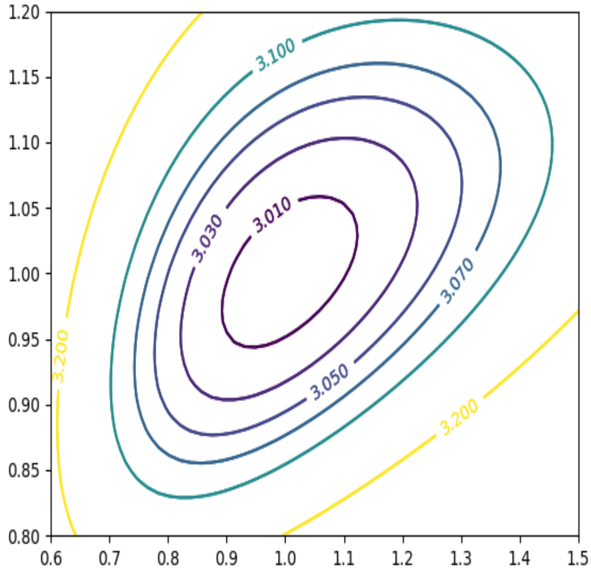
1. Déterminer les points critiques de f. Former la hessienne de f en chacun de ces points, et discuter leur nature (extremum ou selle).
2. Discuter l'existence d'un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra étudier une limite).

Exercice 3 (EML 2016)**.**

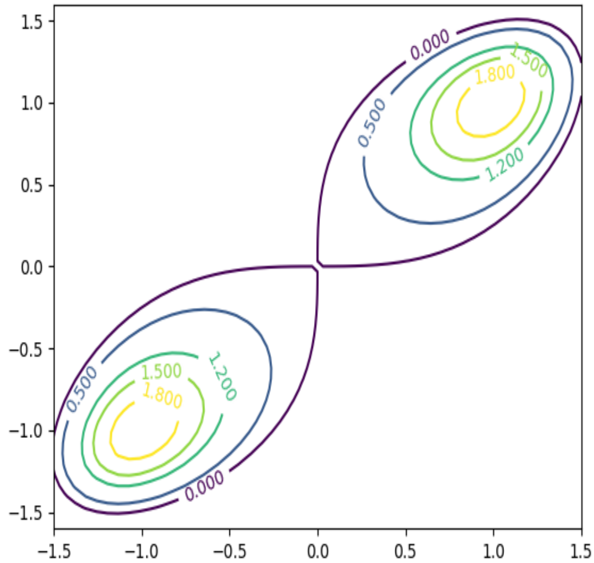
1. Soit $f(t) = t^2 - t\ln(t)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $t = 1$ est la seule solution de l'équation $f(t) = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $g(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de g. On note cet ensemble $\mathscr{D}$, et on admet que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$, et calculer le gradient de g en tout point de $\mathscr{D}$.
3. Montrer que (x, y) est un point critique de g ssi : $x > 1,\ y = \dfrac{x}{\ln(x)}$ et $f\big(\ln(x)\big) = 1$.
   Donner la valeur du seul point critique de g.
4. g admet-elle un extremum local en ce point ?
5. g admet-elle des extremums locaux sur $\mathscr{D}$? Et des extremums globaux ?

Exercice 4.

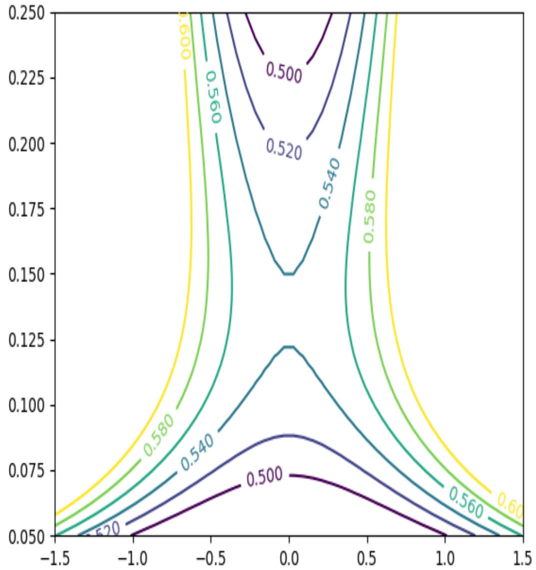
On donne les tracés de ligne de niveau de trois fonctions f_1, f_2, f_3. Repérer d'éventuels extremums locaux ; donner des valeurs approchées des points (x, y) auxquels ils sont atteints, ainsi que de la valeur de la fonction en son extremum.



Lignes de niveau de f_1



Lignes de niveau de f_2



Lignes de niveau de f_3

Exercice 5 (EDHEC 2017)**.** On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   (b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y & = 0 \\ y^3 + x - y & = 0 \end{cases}$

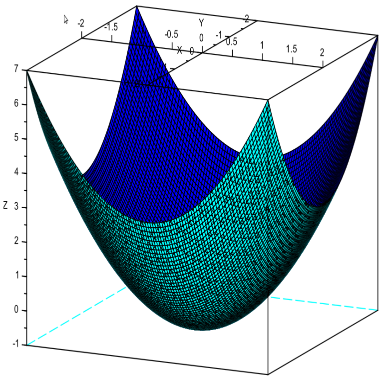
   (c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

   (b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

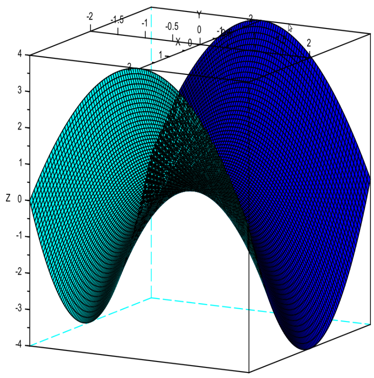
   (c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

   (d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.
4. (a) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - \left(x^2 - 2\right)^2 - \left(y^2 - 2\right)^2 - 2\left(x + y\right)^2$.

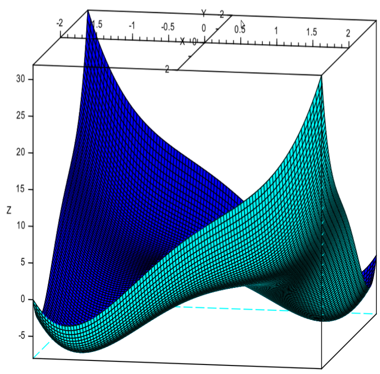
   (b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?
5. L'une de ces 3 figures donne la nappe représentative de f. Laquelle ? Justifiez.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 6. Soit $f : (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2} - ey^2$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f et leur nature.

On va maintenant rechercher les minimums globaux de f.

3. Donner les points où f peut admettre un minimum global.
4. Montrer :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) - ex^2 \geqslant 0$$
   (on pourra poser $t = x^2 + y^2$ et étudier une fonction de t).
   En déduire : $\forall x \neq 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x, y) > 0$.
5. Montrer finalement que si $(x, y) \neq (0, 1)$ et $(x, y) \neq (0, -1)$, on a $f(x, y) > 0$ et conclure sur les minimums globaux de f.

Exercice 7 (ECRICOME 2020)**.** Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que :
$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$
2. Étudier les variations de f_n.
3. Démontrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
4. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.
5. Montrer : $\forall\, t \geqslant 2,\ t^{2n} - 1 \geqslant 1$. En déduire que : $\forall\, x \geqslant 2,\ f_n(x) \geqslant f_n(2) + \ln(x+1) - \ln(3)$, puis la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

On étudie maintenant la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\mathrm{G}_n : (x, y) \longmapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

7. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
8. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.
9. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1,1)$.
10. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
11. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1,1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Exercice 8 (EML 2020)**.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \longmapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.
2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.
3. Calculer u_1 et u_2.

On considère la fonction F de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ définie par :

$$\mathrm{F} : (x, y) \longmapsto x^2 y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$$

4. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x, y) de $]0,+\infty[^2$.
   (b) Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E_3) définie dans la question 1.
5. (a) Écrire la matrice hessienne, notée H, de la fonction F au point (u_3, u_3^2).
   (b) Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :
$$\lambda_1 \lambda_2 \;=\; -6u_3^2 - 2$$
6. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0,+\infty[^2$?

Exercice 9 (Méthode des moindres carrés)**.**
On démontre dans cet exercice la formule de régression linéaire basée sur la méthode des moindres carrés.
Soient $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux séries statistiques. On cherche à effectuer une régression linéaire, c'est-à-dire à trouver les « meilleurs » a et b tels que $y_i \simeq ax_i + b$.
On décide du critère suivant : on retient le couple (a,b) tel que la quantité

$$\varphi(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2$$

est minimale. Nous allons prouver l'existence et l'unicité de ce couple, et donner sa valeur.

On introduit les indicateurs statistiques usuels :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ ; \ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ ; \ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \ ; \ \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ ; \ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

et on suppose $s_x^2 \neq 0$.

1. Montrer que $\varphi(a,b) = \overline{y^2} - 2a\,\overline{xy} - 2b\,\overline{y} + a^2\,\overline{x^2} + 2ab\,\overline{x} + b^2$.

2. Rappeler les expressions des variances empiriques s_x^2, s_y^2 et de la covariance empirique s_{xy}.

3. Montrer que l'unique point critique de φ est (a_0, b_0) où $a_0 = \dfrac{s_{x,y}}{s_x^2}$ et $b_0 = \overline{y} - a_0\overline{x}$.

4. Calculer $\nabla^2(\varphi)(a_0, b_0)$ (à exprimer en fonction de $\overline{x}$ et $\overline{x^2}$).

5. Montrer que les valeurs propres de cette hessienne (notées λ_1, λ_2, avec éventuellement $\lambda_1 = \lambda_2$) vérifient

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2(1 + \overline{x^2}) \\ \lambda_1\lambda_2 = 4s_x^2 \end{cases}$$

   En déduire que φ admet un minimum local en (a_0, b_0).

On peut en fait montrer que ce minimum est global.