Programme de colle n°20
Semaine du 24/03

Probabilités /
Fonctions à deux variables (pour la fin de semaine)

Généralités
Tous les résultats sur les variables discrètes et à densité sont à connaître.

Inégalités

- Inégalité de Markov pour une variable positive admettant une espérance.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable admettant une variance.

(démonstrations non exigibles).

Loi faible des grands nombres

- Suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (notation : iid).
- Moyenne empirique : si $(X_1, \dots, X_n)$ sont n variables aléatoires, leur moyenne empirique est $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
Espérance et variance de la moyenne empirique de n variables iid (dans le cas d'existence de ces quantités). Ceci doit être redémontré.
- Loi faible des grands nombres :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{X_n} - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

(la terminologie de convergence en probabilité n'est pas au programme).

Convergence en loi

- Définition : (X_n) converge en loi vers X (notation : $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$) si, en tout point x où la fonction de répartition F_X est continue, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

- Dans le cas où (X_n) et X sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$, équivalence avec :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x)$$

- NB : en vue de démontrer certaines convergences en loi, les étudiants doivent connaître sans hésitation la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{R}$.

Théorème Central Limite

- Définition de la moyenne centrée réduite de n variables iid d'espérance m et de variance $V = \sigma^2$:

$$\overline{X_n}^* = \frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)}{\sqrt{V\left(\overline{X_n}\right)}} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma}\right)$$

- TCL : si $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables iid admettant une variance, la suite $\left(\overline{\mathrm{X}_n}^*\right)$ converge en loi vers une variable suivant $\mathcal{N}(0,1)$.
- Conséquences :
  - à « n grand », approximation de la loi de $\overline{\mathrm{X}_n}$ par une loi normale.
  - Sous certaines conditions sur les paramètres, on a les approximations suivantes :
    * $\mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{N}(np,npq)$
    * $\mathcal{P}(\lambda) \simeq \mathcal{N}(\lambda,\lambda)$.

  L'énoncé devra faire remarquer : « on admet qu'on peut approximer la loi ... par une loi normale » .

Estimateurs

- Définitions :
  - Échantillon d'une loi ($(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées suivant cette loi).
  - Si θ est le paramètre à estimer : estimateur de θ, de $g(\theta)$ (une fonction quelconque de l'échantillon, indépendante de θ).
  - Pour bien se mettre d'accord sur la quantité à estimer, on pourra dire : «on considère T_n comme un estimateur de $g(\theta)$».
- Exemple fondamental : la moyenne empirique. Si X a pour espérance m et pour variance v, les étudiants doivent savoir redémontrer que $\mathbb{E}(\overline{\mathrm{X}_n}) = m$ et $\mathrm{V}(\overline{\mathrm{X}_n}) = \dfrac{v}{n}$.

À partir d'ici : si T_n est un estimateur de θ, il s'agit surtout de contrôler $\mathbb{P}(|\mathrm{T}_n - g(\theta)| > \varepsilon)$ (ou $\mathbb{P}(|\mathrm{T}_n - g(\theta)| \leqslant \varepsilon)$) à l'aide de Bienaymé-Tchebychev ou de valeurs de Φ si, en conséquence du TCL, on approxime la loi de X_n^* par une loi normale.

Intervalles de confiance

Intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique. Exemples d'utilisation de Bienaymé-Tchebychev ou du TCL pour obtenir de tels intervalles.

À partir de jeudi, on peut rajouter :

Fonctions à deux variables

- Définition. Fonctions polynômiales. Continuité (comme composée de continues... aucune étude en un point « pathologique » , prolongement, etc. n'est au programme).
- Représentation graphique de domaines « simples » de $\mathbb{R}^2$ (demi-plans par exemple).
- Dérivées partielles (notées ∂_1 et ∂_2). Fonctions $\mathcal{C}^1$ (même remarque que pour la continuité). Gradient. Points critiques.
- Dérivées partielles secondes (notées $\partial^2_{i,j}$, $(i,j) \in \{1,2\}^2$).
  Fonctions $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz. Hessienne.
- Recherche d'extremums locaux :
  - Si f est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, tout extremum local est un point critique.
    NB : on admettra que les domaines de définition des fonctions proposées sont des ouverts.
  - Si f est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'étude du spectre de la hessienne donne des informations sur les points critiques : min local si deux vap > 0 ; max local si deux vap < 0 ; pas d'extremum si $\lambda_1\lambda_2 < 0$; on ne peut pas conclure s'il y a une valeur propre nulle.

    NB : les notations de Monge (écriture de la hessienne sous la forme $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ *et les critères qui en découlent) ne sont pas au programme. Il faut rechercher les valeurs propres.*
  - Suites d'exos possibles : examiner le caractère global de l'extremum trouvé ; détermination de la nature d'un point critique dans le cas où l'étude de la hessienne ne permet pas de conclure. Ceci doit être guidé.