

## Préparation Oral HEC

### Séance 1

#### Exercice à préparer

On note  $I_4$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . On définit l'ensemble  $\mathcal{E}$  par :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. *Question de cours* : Énoncer la formule du binôme de Newton pour deux matrices A et B de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Justifier que  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel et en donner une base.
3. Écrire une fonction Python qui prend en entrée une matrice M de taille 4 et renvoie un message permettant de savoir si M appartient ou non à  $\mathcal{E}$ .
4. Soient  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  et  $M_{a,b} \in \mathcal{E}$ .  
Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , donner une expression matricielle de  $M_{a,b}^k$  en fonction de  $k, a$  et  $b$ .
5. Justifier que les matrices de  $\mathcal{E}$  sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  inversible telle que :

$$\forall M \in \mathcal{E}, M = P D P^{-1}$$

où D est une matrice de taille 4 diagonale à déterminer. On donnera une expression matricielle de P.

---

#### Exercice sans préparation

On se donne  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite,  $x \in \mathbb{R}$  un réel, et  $\alpha \in ]0, 1[$ .

On étudie le processus aléatoire  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  défini par

$$X_0 = x ; \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \alpha X_n + \varepsilon_n$$

Étudier la convergence en loi de  $X_n$ .