# Préparation Oral HEC
# Séance 2

## Exercice à préparer (2021)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p$ où $p \in ]0,1[$. On pose pour tout entier $n$ non nul, $Y_n = X_{n-1}X_n$ et $Z_n = Y_nY_{n+1}$.

1. **Question de cours :** Énoncer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
2. Montrer que pour tout entier $n$ non nul, $Y_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre à déterminer.
3. Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont-elles deux à deux indépendantes, mutuellement indépendantes ?
4. Pour tout entier $n$ non nul, déterminer la loi de $Z_n$.
5. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Écrire une fonction Python prenant en arguments `(n,p)` et donnant en sortie une simulation de la variable aléatoire $T_n$.
6. (a) Montrer que pour tout entier $n$ non nul, $T_n$ admet une espérance et la déterminer.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2,

   $$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4$$

   (c) En déduire que $T_n$ admet une variance et la déterminer.
7. Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - p^2| > \varepsilon) = 0$.

---

## Exercice sans préparation (2019)

On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 .

1. Construire une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles.
2. Construire une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables.