# Préparation Oral HEC

# Séance 3

## Exercice à préparer (2023)

Une urne contient $n \geqslant 2$ boules distinctes $B_1, B_2, \ldots, B_n$, que l'on tire successivement et avec remise. Pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_r$ la variable aléatoire qui donne le rang du premier tirage au bout duquel les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ ont été tirées au moins une fois.

1. **Cours :** quel est le nombre de bijections d'un ensemble à $n$ éléments dans un ensemble de $n$ éléments ?

2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Y_1$.

3. Écrire une fonction en Python prenant en argument deux entiers $n$ et $r$ (on supposera $1 \leqslant r \leqslant n$, sans le vérifier) et qui simule une réalisation de la variable $Y_r$.

4. Préciser l'univers-image de $Y_r$. Calculer $\mathbb{P}(Y_r = r)$.

5. Montrer que l'événement $A_r$ : « on tire les boules $B_1, \ldots, B_{r-1}$ lors des $r$ premiers tirages sans jamais tirer les boules $B_{r+1}, \ldots, B_n$, et on tire la boule $B_r$ au $(r+1)$-ème tirage » a pour probabilité :

$$\mathbb{P}(A_r) = \frac{\binom{r}{2}(r-1)!}{n^{r+1}}$$

6. En déduire que :

$$\mathbb{P}(Y_r = r+1) = \frac{r(n-r)r! + \binom{r}{2}r!}{n^{r+1}}$$

7. On fixe $r$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note $W_i$ la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, $i$ boules distinctes parmi les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ soient sorties. On pose $X_1 = W_1$ et, pour tout $i \geqslant 2$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.
   (a) Déterminer la loi de $X_i$ ainsi que son espérance.
   (b) En déduire l'espérance de $Y_n$.
   (c) Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

---

## Exercice sans préparation (2023)

Un graphe est dit régulier s'il est simple et si tous ses sommets ont le même degré. Ce degré commun est alors appelé le degré du graphe régulier.

1. Écrire le code Python d'une fonction `regulier(M)` qui prend en entrée la matrice d'adjacence d'un graphe simple et qui renvoie un booléen égal à `True` si le graphe est régulier, à `False` sinon.

2. Déterminer les graphes réguliers de degré 0,1 et 2 .

3. Soit G un graphe régulier de degré 3 . Que dire du nombre de sommets de G ?

## Bonus

Exercice avec préparation, 2021

1. **Question de cours** : Théorème de la bijection.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels $x$ tels que $e^x - e^{-x} > 0$.

   On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(e^x - e^{-x}) \end{array}$$

   On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. (a) Sans chercher à le calculer, prouver l'existence d'un unique réel $\alpha$ vérifiant $f(\alpha) = 0$ et montrer que $\alpha < 1$.

   (b) Compléter le programme Python suivant permettant d'avoir une valeur approchée par défaut de $\alpha$ à 0.01 près.

```python
a = 0
b = 1
while ... :
    if ... :
        b=(a+b)/2
    else:
        a=(a+b)/2
print(a)
```

   (c) Calculer la valeur explicite de $\alpha$.

4. (a) Donner la position relative de la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ par rapport à (C).

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big)$ et tracer sur un même graphe la courbe (C) et la droite $(\Delta)$.

5. Soit $\lambda$ un réel, on note $g_\lambda$ la fonction définie par :

$$g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, ; \; x \mapsto \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x < \alpha \\ \dfrac{\lambda}{e^{2x} - 1} \quad \text{si} \quad x \geqslant \alpha \end{cases}$$

   (a) On pose $h : x \mapsto f(x) - x$. Après avoir calculé $h'(x)$, déterminer $\lambda$ en fonction de $\alpha$ pour que $g_\lambda$ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.

   (b) Donner la fonction de répartition $G_\lambda$ de X.

6. Montrer qu'au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalent à $\ln(x)$.