ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2025-2026
Mathématiques

Devoir surveillé de rentrée

02/09/2025
Durée : 2h

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que les quantités qui suivent soient bien définies) :

1. $\dfrac{1}{4x^2} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4x^2}}\sqrt{\frac{5}{4x^2}}}$ (avec $x > 0$)
2. $\sqrt{\dfrac{1}{e^{2x^2}}}$
3. $\dfrac{\left(\ln(x^2)\right)^3}{\ln\left(x^{\ln(x)}\right)}$ (avec $x > 0$)
4. $x\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}\right) - \dfrac{2}{x^2-1}$
5. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$
6. $\dfrac{(n+1)!(n-1)!}{(n!)^2}$

Exercice 2

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -x+2y+z=4 \\ -5x+9y+6z=19 \\ 2x-3y-2z=-6 \end{cases}$$

Exercice 3

On donne : $\ln(2) \simeq 0,69$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln\left(1+u_n^2\right)$.

1. Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - x$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
   Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ; puis au point d'abscisse 1.
   (c) Donner un aperçu de la courbe représentative de f, tenant compte des résultats précédents.
   (d) Montrer, à l'aide de l'étude de f, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (e) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. (a) Montrer, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité : $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.
   (c) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité : $u_n \leqslant (\ln(2))^n$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(a) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(b) Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant \dfrac{1-\left(\ln(2)\right)^{n+1}}{1-\ln(2)}$.

(c) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 4 (algèbre linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big((x,y)\big) = (x+y, x-y, 2x)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Déterminer son noyau.

3. À l'aide du théorème du rang, déterminer $\dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big)$.

4. Donner une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice 5 (Informatique)

1. Écrire une fonction Python `plus_petit(L)` qui prend en entrée une liste de nombres `L` et renvoie son plus petit élément.
   (sans utiliser la fonction `min` *bien sûr !!)*

2. Écrire une fonction Python `pos_mini(L)` qui prend en argument une liste `L` et renvoie *l'indice* d'un des plus petits éléments de `L`.
   Par exemple, `pos_mini([1,2,-1,0,-1,5])` *pourra renvoyer 2 ou 4 (les deux indices où apparaît* -1*, valeur minimale de la liste* `[1,2,-1,0,-1,5]`).

On rappelle que si `L` est une liste, la commande `del L[i]` enlève l'élément d'indice `i` de `L`, comme dans l'exemple suivant :

```
>>> L = [1,2,-1,0,-1,5]

>>> del L[2]

>>> L
[1, 2, 0, -1, 5]
```

3. On cherche à écrire une fonction qui ordonne, dans l'ordre croissant, une liste `L` avec l'algorithme suivant :

   - On définit une liste vide `M`.
   - Tant que `L` n'est pas vide, on détermine la position d'un de ses minimums, on ajoute la valeur de ce minimum à la liste `M`, puis on retire ce minimum de `L`.
     On ne demande pas de justifier que cet algorithme fournit le résultat recherché.

   Compléter le code suivant pour effectuer ceci :

```
def tri_croissant(L):
    M = ...
    while ... :
        k = pos_mini(L)
        ....
        del ...
    return M
```