Devoir surveillé de rentrée
Corrigé

Exercice 1

1.
$$\frac{1}{4x^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4x^2}}\sqrt{\frac{5}{4x^2}}} = \frac{1}{4x^2}\sqrt{4x^2}\sqrt{\frac{4x^2}{5}} = \frac{1}{4x^2}\times 4x^2\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2.
$$\sqrt{\frac{1}{e^{2x^2}}} = \sqrt{e^{-2x^2}} = e^{\frac{1}{2}(-2x^2)} = e^{-x^2}$$

3.
$$\frac{\left(\ln(x^2)\right)^3}{\ln\left(x^{\ln(x)}\right)} = \frac{\left(2\ln(x)\right)^3}{\ln(x)\times\ln(x)} = \frac{8\left(\ln(x)\right)^3}{\left(\ln(x)\right)^2} = 8\ln(x)$$

4.
$$x\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)-\frac{2}{x^2-1} = x\left(\frac{(x-1)+(x+1)}{(x-1)(x+1)}\right)-\frac{2}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)}{x^2-1} = 2$$

5.
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n)$$

6.
$$\frac{(n+1)!(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{\left((n+1)\times n!\right)(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)\times(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)\times(n-1)!}{n\times(n-1)!} = \frac{n+1}{n}$$

Exercice 2

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -x+2y+z=4 \\ -5x+9y+6z=19 \\ 2x-3y-2z=-6 \end{cases}$$

Un pivot de Gauss donne : avec $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 5\mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 2\mathrm{L}_1$

$$\begin{cases} -x+2y+z=4 \\ -5x+9y+6z=19 \\ 2x-3y-2z=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+z=4 \\ -y+z=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

d'où en remontant : $y=2, z=1, x=1$.
L'unique solution de ce système est donc
$$(x,y,z)=(1,2,1)$$

Exercice 3

On donne : $\ln(2) \simeq 0,69$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **la suite définie par** $u_0 = 1$, **et :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln\left(1+u_n^2\right)$.

1. **Établir, pour tout entier** $n \in \mathbb{N}$**, l'encadrement** $0 \leqslant u_n \leqslant 1$**.**

   On procède par récurrence :

   - Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \in [0,1]$ donc la propriété est vraie ;
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose qe $0 \leqslant u_n \leqslant$. Alors :

   $$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 &\Rightarrow 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2 && \text{(croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ &\Rightarrow 1 \leqslant 1 + u_n^2 \leqslant 2 \\ &\Rightarrow \ln(1) \leqslant \ln(1+u_n^2) \leqslant \ln(2) && \text{(croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\Rightarrow 0 \leqslant \ln(1+u_n^2) \leqslant \ln(2) \leqslant 1 && \text{(avec la valeur approchée de l'énoncé)} \\ &\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \end{aligned}$$

   ce qui fournit l'hérédité (rappel : procéder par implications ici).

   On peut conclure : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2. **Soit** f **la fonction définie sur** $\mathbb{R}_+$**, à valeurs réelles, telle que** $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - x$**.**

   (a) **Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**.**

   Cas d'école de croissances comparées : on a une FI $\infty - \infty$ mais on factorise par le terme dominant

   $$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+x^2\right) - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}}_{\to 0} - 1\right) = -\infty$$

   La limite $\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} \to 0$ s'obtient par croissances comparées.

   (b) **Dresser le tableau de variation de** f**.**
   Donner l'équation de la tangente à la courbe de f **au point d'abscisse 0 ; puis au point d'abscisse 1.**

   f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables.

   $$\forall\, x \geqslant 0,\ f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x - 1 - x^2}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

   en reconnaissant une identité remarquable.
   On en déduit que $f'(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$: f est décroissante sur cet intervalle.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln(2)-1$	$\searrow$	$-\infty$

   On rappelle l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 :

   $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

   Au point $x_0 = 0$ on obtient $\boxed{\mathrm{T}_0 : y = -x}$; et au point $x_0 = 1$: $\boxed{\mathrm{T}_1 : y = \ln(2) - 1}$ (tangente horizontale).

(c) **Donner un aperçu de la courbe représentative de f, tenant compte des résultats précédents.**

(d) **Montrer, à l'aide de l'étude de f, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.**

On remarque :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n^2) - u_n = f(u_n)$$

(on peut bien invoquer f, définie sue $\mathbb{R}_+$, car $u_n \geqslant 0$ pour tout n).
L'étude précédente montre : $\forall\, x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant 0$; comme les u_n sont positifs on en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) \leqslant 0$$

ce qui montre que (u_n) est décroissante.

(e) **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.**

(u_n) est décroissante ; et est à termes positifs donc minorée par 0.
Par théorème de convergence monotone on en déduit que (u_n) converge.

3. (a) **Montrer, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité : $\ln(1+x) \leqslant x$.**

C'est super classique. On peut étudier la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$ pour constater qu'elle est toujours négative ; ou utiliser la concavité :
Soit $h : x \mapsto \ln(1+x)$. h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \geqslant 0$:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad h''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

Ce dernier signe montre que h est concave sur $\mathbb{R}_+$; la courbe de h se situe donc en dessous de ses tangentes.
Or l'équation de la tangente en 0 est $y = x$ (voir formule plus haut) ; on a donc $\forall\, x \geqslant 0,\ h(x) \leqslant x$ ce qui est la propriété demandée.

(b) **Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.**

Avec l'inégalité précédente, et comme on a $u_n^2 \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ln(1+u_n^2) \leqslant u_n^2$$

ce qui donne bien $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.

(c) **En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité : $u_n \leqslant (\ln(2))^n$.**

On procède encore par récurrence : soit $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leqslant (\ln(2))^n$ ».
Pour $n = 1$, $u_1 = \ln(1+1^2) = \ln(2)$ et $(\ln(2))^1 = \ln(2)$: on a bien $\mathscr{P}(1)$.
Supposons maintenant que, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie.
On peut écrire, avec la question précédente :

$$u_{n+1} \leqslant u_n^2 \leqslant \left((\ln(2))^n\right)^2 = \ln(2)^{2n}$$

Or pour $n \geqslant 1$, $2n \geqslant n+1$; et comme $\ln(2) \in [0,1]$ on en déduit que $(\ln(2))^{2n} \leqslant (\ln(2))^{n+1}$.
On obtient finalement

$$u_{n+1} \leqslant u_n^2 \leqslant \ln(2)^{2n} \leqslant (\ln(2))^{n+1}$$

ce qui donne $\mathscr{P}(n+1)$.
La propriété $\mathscr{P}(n)$ est initialisée à $n = 1$ et héréditaire ; elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

NB : la propriété est encore vraie pour $n = 0$ (vérification immédiate) ; par contre l'hérédité $\mathscr{P}(0) \Rightarrow \mathscr{P}(1)$ ne fonctionne pas...

(d) **Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**
Comme $\ln(2) \in [0,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln(2))^n = 0$.
Avec les questions précédentes, on a l'encadrement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

ce qui permet de conclure $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ par théorème des gendarmes.

4. **Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.**

(a) **Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ donc (S_n) est croissante.

(b) **Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant \dfrac{1-\left(\ln(2)\right)^{n+1}}{1-\ln(2)}$.**

On reconnaît à droite une formule de somme géométrique... on va utiliser la majoration de 3c.

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant (\ln(2))^n$; et cette inégalité est encore vraie pour $n = 0$ par vérification immédiate.
On peut alors écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} (\ln(2))^k = \frac{1-\ln(2))^{n+1}}{1-\ln(2)}$$

(c) **En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ; et donner un encadrement de sa limite.**

Cette dernière inégalité semble donner un majorant de la suite (S_n)... mais attention, un majorant ne doit pas dépendre de n !
On écrit alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant \frac{1-(\ln(2)^{n+1}}{1-\ln(2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)}$$

ce qui montre bien cette fois que (S_n) est majorée. Comme elle est aussi croissante, on en déduit qu'elle converge. Notons ℓ sa limite.
Enfin, (S_n) est à termes positifs car les u_n sont tous positifs.
On a donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)}$$

et en passant à la limite : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{1-\ln(2)}$.
(NB : on peut aussi écrire : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n \geqslant S_0 = u_0 = 1$ et en déduire $1 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{1-\ln(2)}$.)

Exercice 4 (algèbre linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **définie par :**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big((x, y)\big) = (x + y, x - y, 2x)$$

1. **Montrer que** f **est une application linéaire.**

   On vérifie la définition : soient $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f\big((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)\big) \\ &= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2, \lambda x_1 + x_2 - (\lambda y_1 + y_2), 2(\lambda x_1 + x_2)) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1, 2x_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2, 2x_2) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

   ce qui montre que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

2. **Déterminer son noyau.**

   On cherche les (x, y) d'image nulle.

   On écrit :

$$(x, y) \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow f\big((x, y)\big) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0,0)$$

   et n a donc $\operatorname{Ker}(f) = \big\{(0,0)\big\}$.

3. **À l'aide du théorème du rang, déterminer** $\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$**.**

   Le théorème du rang s'écrit $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f)$; soit ici $2 = 0 + \operatorname{rg}(f)$. On a donc

$$\operatorname{rg}(f) = 2$$

4. **Donner une base de** $\operatorname{Im}(f)$**.**

   On peut utiliser le fait que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), f(e_2)\big)$ où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   On a $f(e_1) = f\big((1,0)\big) = (1,1,2)$ et $f(e_2) = f\big((0,1)\big) = (1,-1,0)$; et donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big((1,1,2), (1,-1,0)\big)$$

   On a trouvé une famille **génératrice** de $\operatorname{Im}(f)$; il faut maintenant montrer qu'elle est libre. C'est le cas car les deux vecteurs qui la composent sont non colinéaires.

$$\big\{(1,1,2), (1,-1,0)\big\} \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f)$$

   NB : on peut aussi remarquer que la famille génératrice obtenue est de cardinal 2 ; et que $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension 2. Ceci montre que cette famille est bien une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 5 (Informatique)

1. **Écrire une fonction Python `plus_petit(L)` qui prend en entrée une liste de nombres `L` et renvoie son plus petit élément.**
   (sans utiliser la fonction `min` bien sûr !!)

   Algo de recherche du min classique : n initialise un minimum au premier terme de la liste ; on parcourt la liste et dès qu'on rencontre un élément plus petit que notre « minimum actuel » , celui-ci devient le « nouveau minimum » .

```
def plus_petit(L):
    m=L[0]
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k]<m:
            m=L[k]
    return m
```

2. **Écrire une fonction Python `pos_mini(L)` qui prend en argument une liste `L` et renvoie *l'indice* d'un des plus petits éléments de `L`.**
   Par exemple,* `pos_mini([1,2,-1,0,-1,5])` *pourra renvoyer 2 ou 4 (les deux indices où apparaît* -1*, valeur minimale de la liste* `[1,2,-1,0,-1,5]`*).

   C'est assez proche de ce qui précède, sauf que cette fois il faut mémoriser, en plus de la valeur du minimum, l'indice auquel on le rencontre (dans la variable `indice`).

```
def pos_mini(L):
    m=L[0]
    indice = 0
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k]<m:
            m=L[k]
            indice = k
    return indice
```

   NB : dans cette version du programme, l'indice renvoyé sera celui de la première position où le min est rencontré (dans l'exemple précédent, ce sera 2).
   Vous pouvez vous amuser à coder une variante de cette fonction qui renvoie *tous* les indices où la valeur minimale apparaît.

On rappelle que si `L` est une liste, la commande `del L[i]` enlève l'élément d'indice `i` de `L`, comme dans l'exemple suivant :

```
>>> L = [1,2,-1,0,-1,5]

>>> del L[2]

>>> L
[1, 2, 0, -1, 5]
```

3. **On cherche à écrire une fonction qui ordonne, dans l'ordre croissant, une liste `L` avec l'algorithme suivant :**

   - **On définit une liste vide `M`.**
   - **Tant que `L` n'est pas vide, on détermine la position d'un de ses minimums, on ajoute la valeur de ce minimum à la liste `M`, puis on retire ce minimum de `L`.**
     On ne demande pas de justifier que cet algorithme fournit le résultat recherché.

   Compléter le code suivant pour effectuer ceci :

```python
def tri_croissant(L):
    M = ...
    while ... :
        k = pos_mini(L)
        ....
        del ...
    return M
```

`M` est donc initialement vide ; à chaque étape on appelle la fonction précédente pour localiser un des termes minimaux de `L`, l'ajouter à `M`, et l'enlever de `L`. On obtient :

```python
def tri_croissant(L):
    M = []
    while len(L)>0 :
        k = pos_mini(L)
        M.append(L[k])
        del L[k]
    return M
```

Noter le test « `len(L)>0` » qui équivaut à dire que `L` n'est pas vide. Ce n'est pas la seule méthode...