

TD1

Relations de comparaison sur les suites

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner un contre-exemple dans le cas d'une propriété fausse.

1. si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
2. si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
3. si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n^5 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^5$
4. si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $(u_n)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n)^n$
5. si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $1 + u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + v_n$
6. si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
7. si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ alors $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(v_n))$.

Exercice 2. Pour les suites (u_n) et (v_n) suivantes, dire si on a : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$? $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$? $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$? Rien de tout cela ?

- | | |
|---|--|
| 1. $u_n = n + 1$ et $v_n = n + 2$ | 7. $u_n = \frac{e^n + 3n}{n^2 + 1}$ et $v_n = e^n$ |
| 2. $u_n = \sqrt{n} + n \ln n$ et $v_n = n$ | 8. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = \frac{n+1}{3n^2+1}$ |
| 3. $u_n = e^n$ et $v_n = e^{2n}$ | 9. $u_n = n^5$ et $v_n = 2^n$ |
| 4. $u_n = n^4 + 3n^2 - 1$ et $v_n = n^4 + 5$ | 10. $u_n = 3$ et $v_n = e^{-n}$ |
| 5. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ | 11. $u_n = \frac{2}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}$ |
| 6. $u_n = \ln(n^3)$ et $v_n = \ln(n)^3$ | |

Exercice 3. (*) Déterminer des équivalents simples des suites suivantes :

- | | | |
|-----------------------------------|---|------------------------------------|
| 1. $\ln(n+1)$ | 5. $7n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}\right)$ | 9. $\sqrt{1+e^{-n}} - 1$ |
| 2. $\ln(2n^3 + n)$ | 6. $\frac{1}{n} + e^{-n}$ | 10. $n(e^{1/\sqrt{n}} - 1)$ |
| 3. $\frac{\sqrt{n^2+1}}{e^n + n}$ | 7. $\frac{1}{\ln(n+1)} + 2$ | 11. $(n^4 + 3 + 3^n)(e^{-2n} + 1)$ |
| 4. $\frac{e^{n+1}}{\ln(n+1)}$ | 8. $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ | 12. $\ln(1 + e^{-n^2})$ |
| | | 13. $e^{\frac{1}{n^2-1}} - 1$ |

$$14. \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$16. \left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^3 - 1$$

$$19. e^{n+1-\frac{1}{n}}$$

$$17. \ln(n^2 + n + 1)$$

$$20. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/5} (1+n)^{5/3}$$

$$15. \binom{n}{k} \text{ (avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ fixé).}$$

$$18. \frac{e^{1/2n} - 1}{e^{1/2n} + 1}$$

Exercice 4. (*)

Calculer les limites pour $n \rightarrow +\infty$ des suites suivantes en utilisant des relations de comparaison :

$$1. \frac{n^3 + e^n - \ln(n)}{n^4 - n^2 + \sqrt{n}}$$

$$4. \frac{e^{-n}}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

$$7. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$2. (n^2 - n) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right)$$

$$5. \frac{\ln(n^3 - 2)}{\sqrt{3n^2 + 1}}$$

$$8. (1 + e^{-n})^{n^2}$$

$$3. (2n - 2) \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$$

$$6. \frac{\ln\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)}{2^{-n+1}}$$

$$9. \binom{n}{k} x^n \text{ (avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ fixé, et } x \in [0, 1])$$

(on écrira x^n sous forme d'une exponentielle)

Exercice 5. Déterminer un équivalent de (u_n) sous les hypothèses suivantes :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 2$$

$$3. \forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \leq u_n \leq n+3$$

$$4. \forall n \in \mathbb{N}, n-1 \leq u_n^2 \leq n+3\sqrt{n} \text{ (avec } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0)$$

$$5. \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - e^n \leq n$$

Exercice 6. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces deux suites pour que $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n}$. Donner un exemple où $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, et $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{v_n})$.

2. On suppose que :

- (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs ;
- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$
- (u_n) et (v_n) tendent vers une limite ℓ , où $\ell \in \mathbb{R}_+$ ou $\ell = +\infty$.

Montrer que si $\ell \neq 1$, alors $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice 7. Soit $k > 0$. On cherche à montrer que $k^n = o(n!)$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{k^n}{n!}$.

1. Donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

2. Montrer que : $\forall n \geq n_0, u_n \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Conclure.

Exercice 8. La série harmonique.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$; en déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$.
2. En déduire que $H_n \rightarrow +\infty$.
3. Soit la suite $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2, u_n \leq u_{n-1}$.
4. En déduire que (u_n) converge, puis que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

NB : On note traditionnellement $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln(n))$. On a $\gamma \simeq 0.57721566\dots$; γ est nommée *constante d'Euler-Mascheroni*.

Exercice 9 (Équivalent d'une somme par comparaison série-intégrale).

Soit $p \in \mathbb{N}$, et $S_N = \sum_{k=1}^N k^p$. On cherche à donner un équivalent de S_N pour $N \rightarrow +\infty$.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-1}^k t^p dt \leq k^p \leq \int_k^{k+1} t^p dt$.
2. En déduire un encadrement de S_N pour $N \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer : $S_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^{p+1}}{p+1}$.
4. Vérifier à l'aide de formules connues votre résultat pour $p \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 10. Limite de $(u_n)^n$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

1. Déterminer les limites des suites suivantes :

(a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	(c) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$	(e) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$
(b) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$	(d) $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$	

2. On suppose plus généralement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

- (a) Montrer que $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - 1$.
- (b) En déduire, en fonction de la limite de la suite $n(u_n - 1)$, celle de la suite $(u_n)^n$.

Indications

- 1
 1. Chercher un contre-exemple avec $u_n, v_n \rightarrow +\infty$
 2. Chercher un contre-exemple avec $u_n, v_n \rightarrow 0$
 - 3.
 4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = ?$
 5. Penser à des suites telles que $1 + u_n$ et $1 + v_n$ tendent vers 0.
 - 6.
 7. Non car le ln « écrase les différences » . Contre-exemple ?
- 2 Si nécessaire, commencer par chercher des équivalents simples de u_n et de v_n ; comparer ensuite ces équivalents.
- 3
 1. On se doute de la réponse, mais le montrer proprement !
 2. Ressemble au précédent, mais on peut aller plus loin. Réponse : $3 \ln(n)$.
 - 3.
 - 4.
 5. Même dénominateur
 6. Intuiter la réponse puis démo par quotient.
 - 7.
 - 8.
 9. Formule !
 10. Formule !
 - 11.
 - 12.
 - 13.
 14. Mettre au même dénominateur.
 15. $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$
 - 16.
 17. $\ln(n^2 + n + 1) \sim 2 \ln(n)$ mais le montrer correctement !! (sans passer les équivalents au logarithme)
 18. Le dénominateur tend vers 2
 19. Les équivalents ne passent pas à l'exponentielle...
 20. ... par contre ils passent à une puissance (fixe).
- 4
 - 1.
 2. Écrire la racine carrée comme une puissance
 3. Écrire le contenu du ln comme $1 + x_n$ où $x_n \rightarrow 0$.
 - 4.
 - 5.
 - 6.
 7. Puissance non fixe : on met sous forme exponentielle.
 8. idem
 - 9.
- 5 Pour les encadrements : diviser par « ce qu'il faut » pour obtenir, par encadrement, une quantité qui tend vers 1. Conclure par définition de la relation $\sim$.

- 6
 - 1.

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \rightarrow 1 \Leftrightarrow \dots$$

2. On écrit

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(v_n) + \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$$

On connaît la limite de $\frac{u_n}{v_n}$; on discute alors la limite de $\ln(v_n)$.

Si $v_n \rightarrow 1$ on ne peut pas conclure avec le calcul précédent : chercher un contre-exemple avec des suites de la forme $1 + \alpha_n, \alpha_n \rightarrow 0$.

7 1. Définition de la limite !

2. Utiliser la question précédente.

3.

8 1. Étude ultra-classique de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $] -1, +\infty[$.

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

2. Sommer cette dernière inégalité sur k

Par minoration on aura ensuite la limite voulue.

3. Montrer que $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et utiliser l'inégalité de la question 1 (est-ce légitime ?)

4. Pour obtenir l'équivalent, on revient à la définition : étude du quotient.

9 1. Croissance de l'intégrale : encadrer simplement t^p pour $t \in [k, k+1]$ (resp. $t \in [k-1, k]$).

2. Sommer !

3. Calculer les intégrales de l'encadrement précédent.

4.

10 1. Pour (d) : mettre sous la forme $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n}$. Pour (e) : utiliser $\frac{n+1}{n-1} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n-1}{n}}$.

2. (a) La formule utile ici demande une expression de la forme $\ln(1 + \dots)$: forcer le passage.

(b)

Solutions

1 1. Non : considérer $u_n = n$ et $v_n = n+2$.

2. non : considérer $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = e^{-n}$

3. Oui (voir cours)

4. Non : considérer $u_n = 1$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$: $u_n^n \rightarrow 1$ et $v_n^n \rightarrow e$.

5. Non : prendre $u_n = \frac{1}{n} - 1$ et $v = \frac{1}{n^2} - 1$. (u_n) et (v_n) tendent vers $-1 \neq 0$ donc sont toutes deux équivalentes à -1 , donc équivalentes ; et $u_n + 1 = \frac{1}{n}$ et $v_n + 1 = \frac{1}{n^2}$ ne sont pas équivalentes.

6. Oui (voir cours)

7. Non : $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = n$; on obtient alors $\ln(u_n) = \frac{1}{2} \ln(v_n)$.

2 1. $u_n \sim n$ et $v_n \sim n$; donc $u_n \sim v_n$

2. $u_n \sim n \ln(n)$ et $v_n = n$, donc $v_n = o(u_n)$

3. $\frac{u_n}{v_n} = e^{-n} \rightarrow 0$, donc $u_n = o(v_n)$.

4. $u_n \sim n^4$ et $v_n \sim n^4$, donc $u_n \sim v_n$.

5. $u_n \rightarrow 1$ et $v_n \rightarrow 1$, donc $u_n \sim v_n \sim 1$.

6. $u_n = 3 \ln(n)$, donc $\frac{u_n}{v_n} = \frac{3}{\ln(n)^2} \rightarrow 0$: $u_n = o(v_n)$.

7. $u_n \sim \frac{e^n}{n^2} = o(e^n)$.

8. $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ et $v_n \sim \frac{1}{3n}$; donc $u_n = o(v_n)$.

9. $u_n = o(v_n)$ par croissances comparées.

10. $\frac{v_n}{u_n} = \frac{e^{-n}}{3} \rightarrow 0$ donc $v_n = o(u_n)$.

11. $v_n \sim \frac{1}{n^2}$, donc aucune des trois relations n'est vérifiée.

3 1. $\ln(n+1) = \ln(n)(1+1/n) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$ d'où $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \rightarrow 1$: on obtient $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

2. $\ln(2n^3+n) = \ln(2n^3) + \ln(1+1/2n^2) = 3\ln(n) + \ln(2) + \ln(1+1/2n^2)$; d'où en divisant : $\frac{\ln(2n^3+n)}{3\ln(n)} \rightarrow 1$. Donc $\ln(2n^3+n) \sim 3\ln(n)$.

3. $\frac{\sqrt{n^2+1}}{e^n+n}$

4. $\frac{e^{n+1}}{\ln(n+1)}$

5. $7n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}\right)$

6. $\frac{1}{n} + e^{-n}$

7. $\frac{1}{\ln(n+1)} + 2$

8. $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

9. $\sqrt{1+e^{-n}} - 1$

10. $n(e^{1/\sqrt{n}} - 1)$

11. $(n^4+3+3^n)(e^{-2n}+1) \sim 3^n \times 1 = 3^n$

12. $\ln(1+e^{-n^2}) \sim e^{-n^2}$ (avec $e^{-n^2} \rightarrow 0$).

13. $e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1 \sim \frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$ (avec $\frac{1}{n^2-1} \rightarrow 0$)

14. $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$.

15. $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$

16. $= \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^3 - 1 \sim \frac{3}{2^n}$ avec $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$.

17. $\ln(n^2+n+1) = \ln\left(n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right) = 2\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. Alors $\frac{\ln(n^2+n+1)}{2\ln(n)} \rightarrow 1$ assez facilement, et $\ln(n^2+n+1) \sim 2\ln(n)$.

Attention, ne pas passer les équivalents au logarithme !!

18. $e^{1/2n} - 1 \sim \frac{1}{2n}$ car $\frac{1}{2n} \rightarrow 0$; $e^{1/2n} + 1 \rightarrow 2$, donc ~ 2 . Par quotient, $\frac{e^{1/2n} - 1}{e^{1/2n} + 1} \sim \frac{1}{4n}$

19. $e^{n+1-\frac{1}{n}} \sim e^{n+1}$ car le quotient $\frac{e^{n+1-\frac{1}{n}}}{e^{n+1}} = e^{1/n}$ tend vers 1

20. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/5} \rightarrow 1 \neq 0$ donc ~ 1 ; $+1+n \rightarrow n$ donc $(1+n)^{5/3} \sim n^{5/3}$ par passage à une puissance fixe.
Donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/5} \times (1+n)^{5/3} \sim n^{5/3}$.

4 Éléments de réponse :

1. $\sim \frac{e^n}{n^4} \rightarrow +\infty$

2. $\sim n^2 \left(\frac{1}{2n^2}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$

3. $\sim 2n \times \frac{1}{n+2} \rightarrow 2$

4. $\sim ne^{-n} \rightarrow 0$

5. $\sim \frac{3 \ln(n)}{\sqrt{3}n} \rightarrow 0$
6. $\sim \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$
7. $\rightarrow e$
8. $\rightarrow 1$
9. $\sim \frac{n^k}{k!} x^n = \frac{1}{k!} n^k e^{n \ln(x)}$. $\ln(x) < 0$ sur $]0, 1[$ donc on a une croissance comparée puissance / exponentielle décroissante : $n^k e^{n \ln(x)} = 0$.
NB : manip non valable sur $x = 0$ mais alors la suite est nulle...

5 Éléments de réponse :

1. $u_n \rightarrow 3 \neq 0$ donc $u_n \sim 3$.
2. De même $nu_n \sim 2$ d'où en divisant $u_n \sim \frac{2}{n}$.
3. Par théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1 : u_n \sim n$.
4. Comme au dessus on montre que $u_n^2 \sim n$ d'où par passage à la racine $\sqrt{u_n^2} \sim \sqrt{n}$ et $u_n \sim \sqrt{n}$ car $u_n \geq 0$.
5. L'encadrement s'écrit aussi $\forall n \in \mathbb{N}, e^n \leq u_n \leq n + e^n$ et par gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 1 : u_n \sim e^n$.

6 1.

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \rightarrow 1 \Leftrightarrow e^{u_n - v_n} \rightarrow 1 \Leftrightarrow u_n - v_n \rightarrow 0$$

Avec $u_n = n^2 - n$ et $v_n = n^2$ on a bien $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$; mais $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n} = e^{-n} \rightarrow 0$ donc $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{v_n})$

2. On écrit

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln\left(v_n \times \frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(v_n) + \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$$

$u_n \sim v_n$ donc $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$, donc $\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \rightarrow 0$.

Si $v_n \rightarrow \ell \neq 1$, alors $\ln(v_n) \rightarrow \begin{cases} -\infty & \text{si } \ell = 0 \\ \ln(\ell) \neq 0 & \text{si } \ell > 0, \ell \neq 1 \\ +\infty & \text{si } \ell = +\infty \end{cases}$; et dans tous ces cas $\frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} \rightarrow 0$; d'où on déduit $\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} \rightarrow$

1 puis $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Si $\ell = 1$: considérons par exemple $u_n = 1 + e^{-n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.

On a bien $u_n \sim 1$ et $v_n \sim 1$ (ces suites tendent vers 1) ; et $\ln(u_n) \sim e^{-n}$, $\ln(v_n) \sim \frac{1}{n}$ en vertu de l'équivalent classique $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ pour (u_n) tendant vers 0 en $+\infty$.

e^{-n} et $\frac{1}{n}$ ne sont pas équivalents ; donc $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ ne le sont pas non plus.

7 Solution :

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{k}{n+1}$ après simplifications ; donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 0$.
Par définition de la limite, on en déduit directement le résultat voulu.

2. Montrer que : $\forall n \geq n_0, u_n \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.

On effectue une récurrence.

- Au rang n_0 , on a bien $u_{n_0} \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n_0-n_0}} = u_{n_0}$: la propriété est vraie au rang n_0 .

- Soit $n \geq n_0$ tel que $u_n \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.

$n \geq n_0$ donc par la question 1, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$, ce qui donne $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ après multiplication par $u_n > 0$.

Ainsi :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2} \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}} = \frac{u_{n_0}}{2^{n+1-n_0}}$$

en utilisant la propriété au rang n ; ce qui donne l'hérédité.

- On a donc : $\forall n \geq n_0, u_n \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.

3. Comme $u_n > 0$ pour tout n , on a l'encadrement :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$$

Comme $\frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}} \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $u_n \rightarrow 0$, donc $\frac{k^n}{n!} \rightarrow 0$; ce qui implique que $k^n = o(n!)$.

8 1. Étude ultra-classique de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $] -1, +\infty[$: un tableau de variation montre que cette fonction ne prend que des valeurs négatives.

$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ donc il faut montrer $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; ce qui revient à appliquer l'inégalité précédente à $x = 1/k$ (on a bien $1/k > -1$)

2. On somme cette dernière inégalité pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) \quad \text{par télescopage}$$

donc $H_n \geq \ln(n+1)$. Comme $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$, par minoration on a aussi $H_n \rightarrow +\infty$.

3. Avec la minoration précédente : $H_n - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$ (croissance de la fonction $\ln$).
Calculons

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= H_n - \ln(n) - (H_{n-1} - \ln(n-1)) \\ &= H_n - H_{n-1} + \ln(n-1) - \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

mais avec $n \geq 2$, $-\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{2} > -1$ donc on peut appliquer la question 1 et écrire $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$; donc $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq 0$.

On a bien : $\forall n \geq 2, u_n - u_{n-1} \leq 0$: la suite (u_n) est décroissante.

4. Décroissante et minorée par 0 : (u_n) converge.

On étudie le quotient :

$$\frac{H_n}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + u_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{u_n}{\ln(n)}$$

et avec $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ et $\ln(n) \rightarrow +\infty$ on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$$

donc $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

9 1. Croissance de l'intégrale : si $f(t) \leq g(t)$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Par croissance de $t \mapsto t^p$:

sur $[k-1, k]$, $t^p \leq k^p$ donc $\int_{k-1}^k t^p dt \leq \int_{k-1}^k k^p dt = k^p$

et sur $[k, k+1]$, $t^p \geq k^p$ donc $\int_k^{k+1} t^p dt \geq \int_k^{k+1} k^p dt = k^p$ donc on a l'encadrement.

2. On somme pour k allant de 1 à N :

$$\sum_{k=1}^N \left(\int_{k-1}^k t^p dt \right) = \int_0^1 t^p dt + \int_1^2 t^p dt + \dots + \int_{N-1}^N t^p dt = \int_0^N t^p dt \text{ par Chasles ; et de même}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\int_k^{k+1} t^p dt \right) = \int_1^{N+1} t^p dt.$$

On trouve finalement

$$\int_0^N t^p dt \leq \sum_{k=1}^N k^p \leq \int_1^{N+1} t^p dt$$

et en calculant ces intégrales :

$$\frac{N^{p+1}}{p+1} \leq \sum_{k=1}^N k^p \leq \frac{(N+1)^{p+1} - 1}{p+1}$$

3. À l'aide de l'encadrement précédent on trouve

$$1 \leq \frac{S_N}{\frac{N^{p+1}}{p+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{p+1} - \frac{1}{N^{p+1}}$$

et par gendarmes $\frac{S_N}{\frac{N^{p+1}}{p+1}} \rightarrow 1$.

$$4. \quad \sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^2}{2}$$

$$\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2N^3}{6} = \frac{N^3}{3}$$

$$\sum_{k=1}^N k = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2 \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{N^2}{2}\right)^2 = \frac{N^4}{4}.$$

La formule est bien vérifiée.