TD2
Séries numériques

Exercice 1. (*) Donner la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+n+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3}{4^n}$
3. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{2}{k^{2/3}}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} e^{-2j+1}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{2n}}{(n-1)!}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n}\,e^{-n}$
8. $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \frac{2i}{\left(i\sqrt{i}+1\right)\left(3-\sqrt{i}\right)}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n}$
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2+\ln n}$

Exercice 2. (*) Justifier l'existence des sommes suivantes, et donner leur valeur.
Indications : pour S_5*, on cherchera* a *et* b *tels que :* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$ *; pour* S_6*,* c *et* d *tels que* $n^2=c\,n(n-1)+d\,n$ *; et pour* S_8*, on fera apparaître* $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ *et* $\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$.

$$S_1=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n} \qquad S_2=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \qquad S_3=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n-2}}{n!} \qquad S_4=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$$

$$S_5=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \qquad S_6=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n} \qquad S_7=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{(n+1)!} \qquad S_8=\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Discuter suivant les valeurs de a et b la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{a^k}{1+b^k}$.

Exercice 4. (Suite récurrente et série)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$, et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est à termes >0. Montrer que (u_n) converge, et donner sa limite.
2. On pose $v_n=\ln(u_n)$. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0-v_{n+1}$.
3. En déduire que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 5. (Étude d'une suite par la série télescopique associée)
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

1. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

2. Donner la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. En procédant de manière similaire, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 6. Soit $\sum a_n$ une SATP convergente.

1. Soit $x \in [0,1]$. En majorant les sommes partielles de la série de terme général $a_n x^n$, montrer que cette série converge.

2. Soit $x \in [-1,0]$. Montrer de même que la série de terme général $a_n x^n$ converge (on pourra examiner sa convergence absolue).

Exercice 7. (Développement en série entière du logarithme)
On considère un réel $x \in [0,1[$.

1. Soit $t \in [0,1]$. Donner la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} (-t)^k$.

2. En intégrant cette dernière égalité entre 0 et x, montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) + (-1)^n \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

3. *On rappelle que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ telles que : $\forall\, t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t)$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (croissance de l'intégrale).*
En encadrant $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ sur $[0,x]$, montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) = 0$.

4. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ converge, et donner la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$.

Exercice 8.

1. (a) Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$: $u_n = \dfrac{1}{2n-1}\sum\limits_{j=1}^{n-1} u_j$.
   (b) Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$, puis calculer u_3.
   (c) Écrire en Python une fonction de paramètre n qui calcule le terme u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. (a) Établir : $\forall\, n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} u_n$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   (c) Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   (d) En déduire la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.
   (e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Montrer : $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.
Indication : en notant $v_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$, on pourra montrer que (v_n) satisfait la relation de récurrence de la question 2a.

Exercice 9. (Critère de d'Alembert)
Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$.
   On considère r tel que $\ell < r < 1$.
   (a) Montrer qu'il existe n_0 entier tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_{n+1} \leqslant r a_n$.
   (b) Montrer : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant r^{n-n_0} a_{n_0}$. En déduire que la série $\sum a_n$ converge.
   (c) *Application :* montrer que la série exponentielle $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{x^k}{k!}$ converge pour tout réel x.
2. On suppose cette fois : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$.
   On considère r' tel que $1 < r' < \ell$.
   (a) Montrer qu'il existe n_0 entier tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_{n+1} \geqslant r' a_n$.
   (b) Montrer : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_n \geqslant (r')^{n-n_0} a_{n_0}$. En déduire que la série $\sum a_n$ diverge.
3. On suppose enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
   En considérant des séries de Riemann, montrer qu'on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$.

Exercice 10. (Séries semi-convergentes)
Soit $\mathrm{S_N} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, calculer les quantités $\mathrm{S_{2N+2}} - \mathrm{S_{2N}}$, $\mathrm{S_{2N+3}} - \mathrm{S_{2N+1}}$, $\mathrm{S_{2N+1}} - \mathrm{S_{2N}}$. En déduire que les suites $(\mathrm{S_{2N}})$ et $(\mathrm{S_{2N+1}})$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
3. Montrer que, pour $n \to +\infty$, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Donner la nature de ces deux séries. Conclusion?

NB : la série étudiée est un cas particulier de *série alternée.* On montre en fait (hors-programme) :

Soit (a_n) une suite positive, décroissante, tendant vers 0. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Exercice 11. (Étude du reste d'une série convergente / des sommes d'une série divergente)
On s'intéresse à la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$. On va montrer sa divergence, puis donner un équivalent de ses sommes partielles (qui tendent donc vers $+\infty$).

1. Soit $n \geqslant 3$. Montrer l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire un encadrement de $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)}$; puis un équivalent de S_n.

On s'intéresse maintenant à la série de terme général $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

3. Justifier que cette série converge.
4. Soit $n \geqslant 2$. Montrer l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$.

5. En déduire un encadrement du reste partiel $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$, puis un équivalent de R_n (on pourra commencer par encadrer $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k\sqrt{k}}$, avec $N \geqslant n+1$).

Exercice 12. Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} H_n = +\infty$.

Indications

1
1. Trouver un équivalent
2. Série de référence
3. Trouver un équivalent
4. Série de référence
5. Mettre au même dénominateur
6. Passer par les sommes partielles car il faut effectuer un changement d'indice
7. Test de Riemann
8. Trouver un équivalent
9. Test de Riemann
10. Comparer à une série de Riemann
11. Prendre un équivalent, puis test de Riemann... assez fin !

2
1. Série géométrique
2. Série géométrique mais attention aux premiers termes !
3. Série exponentielle
4. Série géométrique dérivée
5. Téléscopage : il faut passer par les sommes partielles.
6. $n^2 = n(n-1) + n$
7. On reconnaît une série exponentielle après changement d'indice ; donc passer par les sommes partielles.
8. $1 - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}$. Puis on découpe le ln, et on téléscope !

3 Chercher un équivalent du dénominateur : il faudra discuter suivant la valeur de b.

4
1.
2. Montrer que $v_n - v_{n+1} = u_n$.
3. Revenir à la définition... s'intéresser à la limite des sommes partielles.

5
1. Il faut trouver $\underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.
2.
3. Par téléscopage, on relie la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ à la suite $\big(\ln(u_n)\big)$.
   Si une série à termes négatifs diverge, quelle est la limite de ses sommes partielles ?
4. On pose donc $v_n = nu_n$; et on commence par trouver un équivalent de $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$. Essayer d'utiliser les calculs précédents !!
   Cette fois, on trouvera $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

6
1. Commencer par majorer les sommes partielles de $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ par une quantité indépendante de n.
2. De même on va montrer que les sommes partielles de la série de terme général $|a_n x^n| = a_n|x|^n$ sont majorées.

7
1. Somme usuelle ; et c'est une somme *finie* !!!
2. Avant d'intégrer sur $[0,x]$, s'assurer que l'égalité est bien valable sur $[0,x]$, et le faire figurer dans la rédaction.
3. $1+t \geqslant 1$ suffit à obtenir ce qu'on veut.
4. Revenir à la définition de la convergence d'une série... tout l'exercice a consisté à étudier les sommes partielles.

8
1. (a) Ici une récurrence $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$ ne suffira pas... quel type de récurrence utiliser ?
   (b)
   (c) Ici encore : pour calculer u_n il faut avoir conservé en mémoire les valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Réfléchir à la bonne structure de données.
2. (a) Isoler le terme u_n dans $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j$.
   (b)
   (c)
   (d)
   (e) Regarder la limite des sommes partielles de $\sum \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.
3.

9 1. (a) $r > \ell$ donc il existe n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r$.

(b) Récurrence puis comparaison à une série convergente

(c) $a_k = \dfrac{x^k}{k!}$ donc un calcul simple donne $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$; on devrait se trouver dans le cas de figure de cette question...

2. (a) Comme en 1a avec $r' < \ell$.

(b) Récurrence puis comparaison à une série divergente.

3.

10 1. $\sum\limits_{n=0}^{2N+2} a_n - \sum\limits_{n=0}^{2N} a_n = a_{2N+1} + a_{2N+2}$. Se souvenir que $(-1)^k$ vaut 1 si k est pair et -1 si k est impair.

2. Si (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent vers la même limite, que dire de (S_N) ?

3.

11 1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante, donc sur un intervalle donnée on peut encadrer par les valeurs aux bornes. Faire ça sur $[n, n+1]$ et $[n-1, n]$ puis intégrer.

Pour la primitive on pourra remarquer que $\dfrac{1}{t\ln(t)}$ est de la forme $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$, avec $u(t)$ à déterminer.

2. Pour déduire l'équivalent : chercher un équivalent des deux quantités qui encadrent. Mais il faut ensuite effectuer une démo propre.

3.

4. Comme en 2.

5.

12 1. Écrire $H_{2n} - H_n$ comme une somme, et minorer le terme général de cette somme.

2. Commencer par la monotonie de (H_n). Puis : que dire si $H_n \to \ell$?

Solutions

1 1. $\dfrac{1}{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc cv par comparaison à une série de Riemann (on a bien des termes positifs)

2. $\dfrac{3}{4^n} = 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ cv car série géométrique avec $\left|\dfrac{1}{4}\right| < 1$

3. $\frac{2}{k^{2/3}} \to 0$ donc $\ln\left(1+\frac{2}{k^{2/3}}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k^{2/3}}$ donc dv par comparaison à Riemann ($2/3 < 1$).

4. $e^{-2j+1} = e \times (e^{-2})^j$ cv car série géométrique

5. $\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{2}{n(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{n^2}$. En passant par l'opposé (à termes positifs !) : $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ donc tg de série cv, donc $\sum\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n}\right)$ cv également

6. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2^{2n}}{(n-1)!}$: on passe par la somme partielle : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2^{2n}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^{2n+1}}{n!}$.
La série de tg $\dfrac{2^{2n+1}}{n!} = 2 \times \dfrac{4^n}{n!}$ converge comme série exponentielle ; celle de l'énoncé converge également.

7. $n^2 \times \sqrt{n}\, e^{-n} = n^{5/2} e^{-n} \to 0$ donc $\sum \sqrt{n} e^{-n}$ cv par test de Riemann.

8. $\dfrac{2i}{\left(i\sqrt{i}+1\right)\left(3-\sqrt{i}\right)} \underset{i\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{i}$ donc série divergente.

9. Test de Riemann : $n^2 \times \dfrac{n^2}{2^n} = n^4 e^{-n\ln(2)} \to 0$ par croissances comparées ; donc série cv.

10. Pour $n \geqslant 2$ on a $\ln(n) \leqslant n-1$ (inégalité classique) donc $\ln(n) \leqslant n$ donc $\dfrac{1}{\ln(n)} \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$.
$\sum 1/n$ diverge donc par comparaison de SATP $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

11. On a rapidement : $\dfrac{\ln(n)}{n^2+\ln n} \underset{\frac{\to}{\ln}(n)}{\sim} n^2$. On a une série convergente $\sum 1/n^2$ perturbée par un ln ; mais on sait que ceci ne suffira pas à modifier le caractère convergent.
Par contre on ne peut pas choisir $\alpha = 2$ dans le test de Riemann : ça fait diverger !
On étudie : $n^{3/2}\dfrac{\ln(n)}{n^2} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to 0$ par croissance comparée, donc $\dfrac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ d'où la convergence de $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ par comparaison de SATP ; puis celle de $\dfrac{\ln(n)}{n^2+\ln n}$ par équivalence.

2 1. $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-2}\right)^n$ (donc converge, cf. exo précédent) ; $S_1 = \dfrac{1}{1-e^{-2}}$.

2. La série définissant S_2 est géométrique de raison $1/2$.
$S_2 = \sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{k+3}} = (1/2)^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{(1/2)^3}{1-1/2}$.

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}2^{n-2}}{n!} = -\dfrac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n}{n!} = -\dfrac{e^{-2}}{4}$

4. $S_4 = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1-(1/2)^2}$

5. $S_5 = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. On introduit $N \geqslant 1$ et on écrit :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N\to+\infty} 1$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ existe, et est égale à 1.

6. $\dfrac{n^2}{3^n} = \left(n(n-1)+n\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{9}n(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} + \dfrac{1}{3}n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.
On reconnaît des termes généraux de séries géométriques dérivées, de raison $\dfrac{1}{3} \in]-1,1[$: ces séries convergent.
Il est donc légitime d'écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{9}\,\frac{2}{(1-1/3)^3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-1/3)^2} = \ldots.$$

7. $S_7 = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4^n}{(n+1)!}$.
Pour effectuer un changement d'indice il est souhaitable de passer par les sommes partielles.
Soit $N \geqslant 1$.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{4^n}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{4^{n-1}}{n!} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N+1} \frac{4^n}{n!} \xrightarrow{N\to+\infty} \frac{1}{4}(e^4-1-4) = \frac{e^4-5}{4}$$

($\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x = e^x - 1 - x$).

8. $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.
On écrit un téléscopage habile :

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Avec $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ et $\mathrm{N} \geqslant 2$:

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} (u_{n-1}-u_n) = u_1 - u_{\mathrm{N}} = \ln(1/2) - \ln\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1}\right) \xrightarrow{\mathrm{N}\to+\infty} \ln(1/2) = -\ln(2)$$

donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$.

3 Si $b<1$, $b^k \to 0$ et donc $1+b^k \to 1$, donc ~ 1.
Dans ce cas $\dfrac{a^k}{1+b^k} \sim a^k$, et la série converge ssi $a<1$.
Si $b=1$, $\dfrac{a^k}{1+b^k} = \dfrac{a^k}{2}$ et on a le même résultat.
Si $b>1$, on a $\dfrac{a^k}{1+b^k} \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^k$, donc il y a convergence ssi $a<b$.

4
1. Par récurrence sur n : $u_0>0$; et si $u_n>0$ alors $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$.
On a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$: (u_n) décroît.
Décroissante et minorée par 0, elle converge. Th point fixe : sa limite vérifie $\ell = \ell e^{-\ell}$ soit $\ell(1-e^{-\ell}) = 0$ ce qui donne $\ell = 0$
2. $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - u_n = v_n - u_n$. Donc $u_n = v_n - v_{n+1}$, et par téléscopage

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$$

3. On s'intéresse à $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \lim(v_0 - v_{n+1})$.
$u_n \to 0$ donc $v_n = \ln(u_n) \to -\infty$ et donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \to -\infty$: $\sum u_n$ diverge.

5
1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{2n+2}$ donc $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2n+2}\right) \sim -\dfrac{1}{2n+2} \sim -\dfrac{1}{2n}$ (avec $-\dfrac{1}{2n+2} \to 0$).
La série des $-\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge car son terme général équivaut à $\dfrac{1}{2n}$ (série de Riemann divergente) et on compare des SATP.
Donc la série de TG $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge également.
Comme cette série est à termes négatifs, la suite des sommes partielles décroît et diverge, donc $\to -\infty$.
Or par téléscopage

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln(u_{\mathrm{N}+1}) - \ln(u_0)$$

et donc $\ln(u_{\mathrm{N}+1}) \to -\infty$ ce qui donne $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} u_{\mathrm{N}} = 0$.
2. Avec $v_n = nu_n$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{n}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n}\dfrac{2n+1}{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n}$ et on trouve par des calculs similaires

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

Par comparaison à Riemann la série de TG $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ diverge ; cette fois ces sommes partielles tendent vers $+\infty$ donc $\ln(v_n) \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$.
On a alors l'existence de n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow nu_n \geqslant 1$; ce qui donne alors $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ et la divergence de $\sum u_n$ par comparaison à la série harmonique.

6
1. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, la série $\sum a_n x^n$ est à termes positifs, et on a

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^n \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant a_n x^n \leqslant a_n$$

$\sum a_n$ converge donc $\sum a_n x^n$ converge par comparaison de SATP.
NB : on n'est pas obligés de passer par les sommes partielles ! si on veut le faire on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n \leqslant \mathrm{S}$$

où $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ existe par hypothèse ; les sommes partielles de la SATP $\sum a_n x^n$ sont majorées donc cette série converge.
2. Si $x \in [-1,0]$, alors $|x| \in [0,1]$ et avec $a_n \geqslant 0$ on a $|a_n x^n| = a_n |x|^n$. Le même raisonnement montre que $\sum |a_n x^n|$ converge, donc $\sum a_n x^n$ converge absolument, donc converge.

7
1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$ somme géom FINIE de raison $-t \neq 1$.

2. $\displaystyle\int_0^x (-t)^k \,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$, et

$$\int_0^x \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = \dots$$

avec des primitives usuelles.

3. Pour $t \in [0,1]$ on a $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc $\dfrac{t^{n+1}}{2} \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^{n+1}$ et en intégrant sur $[0,x]$

$$\frac{x^{n+2}}{2(n+1)} \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

on conclut en appelant les gendarmes.

4. On a vu

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) + \underbrace{(-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t}_{\to 0 \text{ pour } n\to+\infty}$$

Les sommes partielles de la série $\sum (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ ont donc une limite finie : cette série converge et sa somme vaut $\ln(1+x)$.

8 1. (a) Par récurrence forte avec $\mathscr{P}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n > 0$ » :

- $u_1 = 1$ est bien défini et > 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathscr{P}(1)\dots\mathscr{P}(n)$ sont vraies, alors $\dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$ est bien définie car $2n+1 > 0$; et cette expression est clairement > 0.

(b) $u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 = \dfrac{1}{3}$; $u_3 = \dfrac{1}{5}(u_1+u_2) = \dfrac{4}{15}$.

(c) On peut proposer

```python
def terme(n):
    u=1
    L=[1]
    for k in range(2,n+1):
        u=1/(2*k-1)*sum(L)
        L.append(u)
    return  u
```

2. (a) Pour $n \geqslant 2$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1}\sum_{j=1}^{n} u_j = \frac{1}{2n+1}\left(\left(\sum_{j=1}^{n-1} u_j\right) + u_n\right) = \frac{1}{2n+1}\left((2n-1)u_n + u_n\right) = \frac{2n}{2n+1}u_n$$

ce qui donne bien le résultat.

(b) (u_n) étant à termes > 0 on examine sa monotonie par le quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{2n+1} < 1$$

donc (u_n) est décroissante ; minorée par 0 ; donc convergente.

(c)

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\to 0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

(d) $\sum \frac{1}{2n}$ diverge donc par comparaison de SATP, la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ diverge.

(e) Un téléscopage donne, pour $\mathrm{N} \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})) = \ln(u_1) - \ln(u_{\mathrm{N}+1}) = -\ln(u_{\mathrm{N}+1})$$

Or ces sommes partielles divergent ; et le signe de l'équivalent $\frac{1}{2n}$ montre que la série $\sum \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ est à termes positifs à partir d'un certain rang ; donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.
On obtient

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right) = +\infty$$

et donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \ln(u_{\mathrm{N}+1}) = -\infty$; finalement $u_{\mathrm{N}} \to 0$.

3. On a déjà $v_2 = \dfrac{16}{8\binom{4}{2}} = \dfrac{16}{8\times 6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} = u_2$.

Il faut maintenant montrer : $\forall\, n \geqslant 2$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2n}{2n+1}$ ce que je laisse à votre sagacité (simplifier des factorielles).
$(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ ont alors le même premier terme et obéissent à la même relation de récurrence : ces suites sont égales.

10 1. $S_{2N+2} - S_{2N} = \dfrac{1}{\sqrt{2N+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2N+1}}$, et ça marche de manière similaire pour les autres. On en déduit que (S_{2N}) est décroissante, (S_{2N+1}) est croissante, et que la différence de ces deux suites tend vers 0.

2. Les suites de la question 1 sont adjacentes donc tendent vers la même limite S. Comme $S_{2N} \to S$ et $S_{2N+1} \to S$ on en déduit que $S_N \to S$: les sommes partielles de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ont une limite finie, donc cette série converge.

3. L'étude du quotient donne l'équivalence.
Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit que $\sum(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$ diverge (convergente + divergente) et que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge : deux séries de terme général équivalent n'ont pas forcément la même nature ! (car ici ce ne sont pas des SATP)

11 1. La fonction $t \mapsto t\ln(t)$ est croissante donc son inverse $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante.
On en déduit : $\forall\, t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{t\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$; et $\forall\, t \in [n-1, n]$, $\dfrac{1}{t\ln(t)} \geqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$ puis les deux inégalités voulues par intégration sur les intervalles respectifs.

2. En sommant de $k = 3$ à n :
$$\sum_{k=3}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \sum_{k=3}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t\right)$$
et on a par Chasles
$$\sum_{k=3}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t\right) = \int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$
$$\sum_{k=3}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t\right) = \int_2^{n} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$
On obtient
$$\int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \int_2^{n} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$
Ces deux intégrales se calculent en remarquant que $\dfrac{1}{t\ln(t)} = \dfrac{1/t}{\ln(t)}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; on trouve
$$\int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\big(\ln(t)\big)\Big]_3^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3))$$
et de même de l'autre côté ; ainsi
$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) + \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$
Ensuite en transpirant un peu on montre que $\dfrac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$ et on conclut par quotient que $S_n \sim \ln(\ln(n))$.

3. Riemann

4. <u>Vraiment</u> comme en 2.

5.
$$\sum_{k=n+1}^{N}\left(\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\left(\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}\right)$$
$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leqslant \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$$
et avec une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t}} = t^{-3/2}$ qui est $t \mapsto \dfrac{t^{-1/2}}{-1/2} = -\dfrac{2}{\sqrt{t}}$
$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{N+1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{N+1}}$$
En passant à la limite $N \to +\infty$ on trouvera un encadrement qui donnera facilement $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

12 1. $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
Pour $k \leqslant 2n$ on a $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$; et donc
$$H_{2n} - H_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times \underbrace{(2n - (n+1) + 1)}_{\text{nb de termes de la somme}} = \frac{1}{2}$$

2. $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc (H_n) est croissante. Si elle tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, (H_{2n}) tend aussi vers ℓ ; et donc en passant à la limite dans $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ on obtient $\ell - \ell \geqslant \dfrac{1}{2}$: c'est absurde.
(H_n) est croissante, ne tend pas vers un réel : elle tend donc vers $+\infty$.