Séries numériques
Exercices supplémentaires

Exercice 1.
Pour les cubes (il y a des DLs).
Discuter en fonction des valeurs des réels a et b la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

Calculer la somme de cette série en cas de convergence.

Exercice 2 (Presque Raab-Duhamel)**.**
Pour les cubes (il y a un DL).
Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. On pose $v_n = n^a u_n$. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.
2. Montrer que la suite $\big(\ln(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
3. En déduire un équivalent de (u_n) ; et discuter la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 3 (Raab-Duhamel, v2)**.**
Pour les cubes (il y a un DL).
Toutes les séries introduites dans cet exercices sont supposées être à termes strictement positifs.

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries vérifiant :
$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathrm{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$
Montrer : $\forall n \geqslant \mathrm{N},\ u_n \leqslant \dfrac{u_\mathrm{N}}{v_\mathrm{N}} v_n$.
2. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec } \alpha > 1$$
Soit β tel que $1 < \beta < \alpha$. On pose $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$.
   (a) Donner un DL à l'ordre $\dfrac{1}{n}$ de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) En déduire, en utilisant la question 1, que $\sum u_n$ converge.
3. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec } \alpha < 1$$
On pose $v_n = \dfrac{1}{n}$.
Par une méthode similaire à celle de la question 2, montrer cette fois que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4. Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \geqslant 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

1. Montrer que (u_n) est à termes > 0, et strictement croissante.
2. On suppose $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que
   $$\forall\, n \geqslant 1,\ u_{n+1} \leqslant u_n + \frac{1}{n^\alpha u_1}$$
   (b) En déduire
   $$\forall\, n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 + \frac{1}{u_1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}$$
   (c) En déduire que (u_n) converge.
3. On suppose maintenant que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\ell > 0$.
   (b) Justifier que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
   (c) À l'aide d'un équivalent de cette dernière série, montrer que $\alpha > 1$.

Exercice 5. On définit la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit l'intégrale: $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_2^n f(x)\mathrm{d}x$.
   (a) En utilisant l'inégalité de la question 1 , démontrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = +\infty$$
   (b) On définit la fonction
   $$\mathrm{F} : \left\{ \begin{array}{rcl} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \end{array} \right.$$
   Calculer la dérivée de F. En déduire une expression de I_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de $\mathrm{I}_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$\mathrm{S}_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$$
   (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à trois, on a :
   $$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x$$
   (b) En déduire que: $\forall n \geqslant 3, \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{I}_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
   (c) Démontrer que : $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{T}_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\left(k^2-1\right)^{\alpha}}$$

   (a) Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que:

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

   En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}.$$

1. Justifier la convergence de la suite (v_n) puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{v_n}{u_n^2}\right)$.
2. Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{Q}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(x - \frac{1}{j}\right)^2$.
   (a) À l'aide de l'étude du signe de Q, établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \leqslant n v_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{v_n}{u_n^2}$.

Exercice 7.
Pour les cubes (il y a des DLs).
Soit (a_n) définie par $a_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. À l'aide d'un DL à l'ordre $o\left(a_n^2\right)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}$.
3. On admet ici le *lemme de l'escalier* (conséquence HP du théorème de Cesaro, lui-même HP) :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell \in \mathbb{R}^*\right) \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell$$

   Donner la nature de la série de terme général a_n.

Indications

1 Faire des DLs !

2
1. Faire un DL
2. $\sum \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ est téléscopique.
3. Passer par $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n$. On compare ensuite à des séries connues !

3
1.
2. (a) Formule usuelle
   (b) Chercher à obtenir une inégalité telle que celle donnée à la question 1. Elle s'obtiendra « à partir d'un certain rang » . Ensuite on conclut par comparaison.
3. C'est effectivement similaire. Sauf que cette fois si on veut obtenir une divergence, il faut MINORER par une série divergente !

4
1.
2. (a) Monotonie de (u_n) !
   (b) Sommer.
   (c) Peut-on majorer la somme partielle de droite ?
3.

5
1.
2. (a) Minorer I_n.
   (b) Sans surprise il faut trouver $\mathrm{F}' = f$.
   (c)
3. (a) Comparaison série-intégrale. Utiliser la monotonie de f.
   (b) Sommer ce qui précède.
   (c)
4.

6
1. Nul besoin de connaître la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; seulement de justifier que celle-ci existe, et est finie.
2. (a) Le signe de Q n'est pas très dur !!
   Ensuite remarquer que c'est un trinôme du second degré de signe constant ; et parler de son discriminant.
   NB culturelle : c'est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; la démo est toujours la même.
   (b)

7
1. Étude de suite récurrente sans piège particulier. Déroulez la méthode comme des grands !
2. Dans cette étude vous aurez besoin d'utiliser (et donc de démontrer !) que $a_{n+1} \underset{n\to}{\sim} +\infty a_n$.
3. Devinez à quelle suite on applique le lemme ??
   On obtient finalement un équivalent de a_n qui permet de conclure sur la série.

Solutions

1

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = (1+a+b)\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$
$$= (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Si $1+a+b \neq 0$ il y a divergence grossière ; si $1+a+b=0$ et $a+2b\neq 0$ on obtient un équivalent en $\frac{\alpha}{n}$ et donc divergence par comparaison de SATP (éventuellement en passant par l'opposé si $a+2b<0$).
Si $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ (un unique couple solution) on a cette fois un équivalent en $\frac{\beta}{n^2}$ et $\sum u_n$ converge.

2

1. Avec $v_n = n^a u_n$ on trouve

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{vn}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^a \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$
$$= a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= \frac{a}{n} - \frac{a}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(-\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{a^2}{2n^2}\right)$$
$$= -\frac{a^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{vn}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a^2}{n^2}$$

Moyennant un passage par la série opposée et une comparaison de SATP on obtient la convergence de $\sum \ln\left(\frac{v_{n+1}}{vn}\right)$

2. On remarque : $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{vn}\right) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$; c'est donc une série téléscopique. Avec un passage par les sommes partielles comme détaillé en cours, la convergence de la question précédente donne la convergence de al **suite** $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

3. Par continuité de l'exponentielle on obtient $v_n \to e^\ell \neq 0$; donc $v_n \sim e^\ell$; ce qui donne $u_n \sim \dfrac{e^\ell}{n^a}$.
Par comparaison (SATP) à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge ssi $a>1$.

3

1. On peut procéder par récurrence ; ou par *produit téléscopique* pour changer. Tous les termes en jeu étant strictement positifs, on peut multiplier terme à terme des inégalités. Soit $n > \mathrm{N}$.

$$\forall\, k \in [\![n, \mathrm{N}]\!],\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \Rightarrow \prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k}$$

ce qui donne $\dfrac{u_n}{u_\mathrm{N}} \leqslant \dfrac{v_n}{v_\mathrm{N}}$.

2. (a) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\dfrac{1}{n} \to 0$.

   (b) On sait que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Avec $\beta < \alpha$ on obtient, à partir d'un certain rang, $1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) < 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$; soit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
   Le résultat de la question 1 fournit alors (APCR, mais on s'en fiche) une inégalité de type $0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{K}\, v_n$; $\sum v_n$ converge (Riemann, $\beta > 1$) donc $\sum u_n$ converge par comparaison de SATP.

3. On déroule la même méthode : on obtient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$; et avec $\alpha < 1$, on a APCR

$$1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) < 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Cette fois ça donne $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$; donc par la question 1 une inégalité de la forme $0 \leqslant v_n \leqslant \mathrm{K}\, u_n$; la divergence de ?$\sum v_n$ donne la divergence de $\sum u_n$.

4

1. Une récurrence montre sans difficulté : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
On en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} > 0$ et la stricte croissance.

2. (a) La stricte croissance donne :$\forall\, n \geqslant 1, u_n \geqslant u_1$ donc $\forall\, n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^\alpha u_n} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha u_1}$ par des manipulations usuelles (décroissance de la fonction inverse !)

   (b) Pour $n \geqslant 2$, on somme les inégalités précédentes de $k=1$ à $n-1$: un téléscopage donne directement le résultat.
   Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k^\alpha}$ est nulle par convention et l'inégalité est encore vraie.

   (c) (u_n) étant croissante, il suffit de la majorer. Comme $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge et on peut écrire

$$\forall\, n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 + \frac{1}{u_1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant u_1 + \frac{1}{u_1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$$

   et cette dernière borne est indépendante de n. On obtient la majoration, et la convergence de (u_n) par thm de convergence monotone.

3. (a) Attention, ne pas passer à la limite dans $u_n > 0$!
Par croissance, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant u_1 > 0$ donc en passant à la limite $\ell \geqslant u_1 > 0$.

(b) $\sum(u_{n+1} - u_n)$ a même nature que (u_n) !

(c) $u_n \to \ell \neq 0$ donc $u_n \sim \ell$.
La relation définissant (u_n) donne

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}\frac{1}{n^\alpha}$$

Par équivalence de SATP, $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum_n \frac{1}{\ell}\frac{1}{n^\alpha}$ ont même nature ; ici convergente. On en déduit $\alpha > 1$.

5 1. Pour $x \geqslant 2$ on a $x^2 \geqslant x$ et donc :

$$0 < x - 1 \leqslant x^2 - 1 \leqslant x^2$$

et en appliquant la racine carrée (croissante sur $\mathbb{R}_+$) et la fonction inverse (décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$) on déduit

$$\frac{1}{\sqrt{x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

d'où le résultat car $\sqrt{x^2} = |x| = x$ pour $x \geqslant 0$.

2. (a) Pour tout $x \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \geqslant \dfrac{1}{x}$.
Pour $n \geqslant 2$, on intègre cette inégalité sur $[2, n]$ (les fonctions sont continues) :

$$\int_2^n \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_2^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

ce qui donne

$$\mathrm{I}_n \geqslant \ln(n) - \ln(2)$$

$\ln(n) - \ln(2) \to +\infty$; par minoration on conclut $\mathrm{I}_n \to +\infty$.

(b) Sur $[2, +\infty[$, $x + \sqrt{x^2-1} \geqslant x > 0$ donc pas de souci de définition. On trouve

$$\begin{aligned}
\forall\, x \geqslant 2,\ \mathrm{F}'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} \quad \text{en multipliant haut et bas par } \sqrt{x^2-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

de sorte que $\mathrm{F}' = f$ (on pouvait s'en douter avec les notations...). Il vient ensuite facilement

$$\mathrm{I}_n = \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_2^n = \mathrm{F}(n) - \mathrm{F}(2) = \ln\left(n + \sqrt{n^2-1}\right) - \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

(c) Avec les règles sur le ln :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n - \ln(n) &= \left(\ln\left(n + \sqrt{n^2-1}\right) - \ln(n)\right) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n + \sqrt{n^2-1}}{n}\right) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right) \\
&= \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

et sans difficulté

$$\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{I}_n - \ln(n)) = \ln(2) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)$$

3. (a) On voit que la fonction f est décroissante sur $[2, +\infty[$.
C'est de la comparaison série-intégrale habituelle (f est continue donc pas de souci pour l'existence des intégrales) :

- pour $k \geqslant 3$, et pour $t \in [k-1, k]$, $f(t) \geqslant f(k)$ ce qui donne en intégrant sur $[k-1, k]$:

$$\int_{k-1}^k f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{k-1}^k f(k)\,\mathrm{d}x = f(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

- pour $k \geqslant 3$, et pour $t \in [k, k+1]$, $f(t) \leqslant f(k)$ ce qui donne en intégrant sur $[k, k+1]$:

$$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x = f(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

(b) On somme l'encadrement précédent pour k allant de 3 à n :

$$\sum_{k=3}^n \left(\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \sum_{k=3}^n \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \sum_{k=3}^n \left(\int_{k-1}^k f(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$\int_3^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \int_2^n f(x)\mathrm{d}x$$

(en effet, $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} = \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2^2-1}} = S_n - \frac{1}{\sqrt{3}}$).
On a ce qu'il faut à droite ; par contre à gauche ça va pas. Il faut en fait observer que l'inégalité de gauche est encore vraie pour $k=2$ (avec les mêmes arguments de décroissance de f). En sonnant l'inégalité de gauche de 2 à n on obtient bien

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

soit $I_{n+1} \leqslant S_n$.

(c) On a vu en 2c que $I_n - \ln(n) \to \ell \in \mathbb{R}$. En notant $\alpha_n = I_n - \ln(n)$, on a $\alpha_n \to \ell$ et on peut alors écrire

$$\frac{I_n}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\alpha_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{\alpha_n}{\ln(n)} \to 1$$

et donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

On divise ensuite l'encadrement précédent par $\ln(n)$ (pour $n \geqslant 2$) :

$$\frac{I_{n+1}}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{I_n}{\ln(n)} + \frac{1}{\sqrt{3}\ln(n)}$$

Le terme de droite tend vers 1 car $\frac{I_n}{\ln(n)} \to 1$ (définition de l'équivalence) et $\frac{1}{\sqrt{3}\ln(n)} \to 0$ (pas de souci) ; pour le terme de gauche

$$\frac{I_{n+1}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

et par un calcul déjà vu $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \to 1$.
Par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$ donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. (a) On prend l'expression de droite :

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+b(k-1)}{(k-1)(k+1)} = \frac{(a+b)k+(a-b)}{k^2-1}$$

Cette expression doit valoir $\frac{1}{k^2-1}$ pour tous les $k \geqslant 2$. On regarde les numérateurs comme des polynômes en k et on identifie les coefficients : on trouve que les uniques (a, b) qui conviennent sont les solutions du système

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$$

ce qui donne $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.
On a donc

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

On sent venir le téléscopage mais les termes sont « décalés de 2 indices » ... pas grave ça va marcher quand même.
On découpe et on fait un changement d'indice $j = k-2$ dans la première ; le « cœur » des sommes se téléscope et il ne reste que les deux termes extrêmes de chaque côté.

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

(b) La question revient à examiner la convergence de la série $\sum \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$. On dispose de l'équivalent

$$\frac{1}{(k^2-1)^\alpha} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^{2\alpha}}$$

et donc par comparaison de SATP à une série de Riemann, la suite (T_n) converge ssi $2\alpha > 1$; ce qui s'écrit aussi $\alpha > \frac{1}{2}$.

6 1. La convergence de la suite (v_n) équivaut à celle de la série de terme général $\frac{1}{j^2}$, qui est acquise car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.
Par ailleurs la divergence de $\sum \frac{1}{j}$ donne la divergence de ses sommes partielles vers $+\infty$ (car c'est une série à termes positifs !) ; donc $u_n \to +\infty$.
On conclut de tout cela que $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{(u_n)^2} = 0$

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Q}(x)$ est une somme de carrés donc $\mathrm{Q}(x) \geqslant 0$.
Un polynôme de signe constant a son discriminant négatif (c'est même une condition nécessaire et suffisante). On calcule ce Δ avec la forme développée de Q :

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}(x) &= \sum_{j=1}^{n}\left(x-\frac{1}{j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(x^2-2\frac{x}{j}+\frac{1}{j^2}\right) = nx^2-\left(2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)x+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\\ \mathrm{Q}(x) &= nx^2-(2u_n)x+v_n\end{aligned}$$

donc $\Delta = (2u_n)^2-4nv_n = 4((u_n)^2-nv_n)$. $\Delta \leqslant 0$ donne bien $(u_n)^2 \leqslant nv_n$.

(b) Il sort de cette dernière inégalité $\dfrac{(u_n)^2}{v_n} \leqslant n$ puis $\dfrac{v_n}{u_n^2} \geqslant \dfrac{1}{n}$ d'où la divergence de $\sum \dfrac{v_n}{u_n^2}$ par comparaison (de SATP) avec la série harmonique.

7 1. On montre par récurrence que les a_n sont positifs ; l'inégalité de concavité habituelle donne la décroissance de (a_n) ; sa convergence s'ensuit ; et le théorème du point fixe donne $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2.
$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n} = \frac{a_n-a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}} = \frac{\frac{(a_n)^2}{2}+o(a_n^2)}{a_n a_{n+1}}$$

Par ailleurs $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1$ (avec $a_n \to 0$) ce qui donne $a_{n+1} \sim a_n$.
On reprend le calcul précédent :

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{(a_n)^2}{2}+o(a_n^2)}{a_n a_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{(a_n)^2}{2}}{a_n \times a_n} = \frac{1}{2}$$

3. Avec $u_n = \dfrac{1}{a_n}$ on trouve directement $\dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{n}{2}$; donc $a_n \sim \dfrac{2}{n}$. Par comparaison de SATP $\sum a_n$ diverge.