Variables aléatoires discrètes

Exercices

Rappels de première année

Exercice 1. (Tirages successifs)
Une urne n°1 contient 2 boules blanches et 4 boules rouges. Une urne n°2 contient 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire au hasard une boule de l'urne n°1, et on la place dans l'urne n°2. Puis on tire au hasard une boule dans l'urne n°2. On note

- B_i l'événement : «On tire une boule blanche dans l'urne n°i».
- R_i l'événement : «On tire une boule rouge dans l'urne n°i».

Déterminer :

1. La probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche.
2. La probabilité que la boule transférée soit blanche, sachant que la deuxième boule tirée est blanche.

Exercice 2. (Marche au hasard sur une droite)
On considère un objet qui se déplace aléatoirement sur un axe. Au temps 0, il part de l'origine; à chaque unité de temps il saute d'une longueur 1 vers la gauche ou vers la droite, de manière équiprobable. On note X_i le déplacement de l'objet à l'étape i : si le i-ème saut est vers la droite, on a $X_i = 1$; s'il est vers la gauche, on a $X_i = -1$. On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i; puis $\mathbb{E}(X_i)$.
2. Montrer que $Y_i = \dfrac{1+X_i}{2}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on définit $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Quelle loi suit Y ? En déduire son espérance et sa variance (on ne redémontrera pas les résultats de cours utilisés).
4. On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ le déplacement total de l'objet au bout de n étapes. Montrer que $X = 2Y - n$. En déduire l'espérance et la variance de X, puis en déduire $\mathbb{E}(X^2)$.
(NB : ceci donne l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre l'objet et l'origine à la n-ème étape).

On s'intéresse maintenant à la probabilité de retour à l'origine au bout de n étapes ; donc à $\mathbb{P}(X_n = 0)$.

5. Justifier qu'au bout d'un nombre impair d'étapes, le mobile ne peut pas être à l'origine.
6. On pose donc $n = 2k$. Donner la valeur de Y correspondant à $X = 0$. En déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.

Exercice 3. Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages avec remise successifs dans cette urne jusqu'à obtenir une boule noire, en ajoutant à chaque tirage une boule blanche supplémentaire dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang du dernier tirage, ou à 0 si toutes les boules tirées sont indéfiniment blanches.

1. Que vaut $X(\Omega)$?

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X = k)$.

3. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$; et en déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.

Exercice 4. On dispose de 3 dés à 6 faces équilibrés. On les lance une première fois ; on réserve les dés tombés sur « 6 » et on relance les autres. On continue jusqu'à ce que tous les dés soient sur « 6 » . On note X le nombre de lancers effectués (avec $X = +\infty$ si l'expérience ne s'arrête jamais). Les dés sont supposés indépendants, et les lancers successifs aussi.

1. Que vaut $X(\Omega)$?

2. Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note X_i le nombre de lancers nécessaire pour que le dé i tombe sur « 6 » . Rappeler la loi de X_i, son espérance et sa variance.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, justifier que $(X \leqslant k) = \bigcup_{i=1}^{3} (X_i \leqslant k)$. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ en utilisant l'indépendance des événements $(X_i \leqslant k)$.

4. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$.

5. Soit $N \geqslant 1$. Donner la valeur de $\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X = k)$. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$. Quelle est la probabilité que l'expérience ne s'arrête jamais ?

Exercice 5. On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p indépendamment des autres.
On dispose pour cela de deux protocoles :

- *Protocole 1 :* on analyse le sang de chacun des N individus.
- *Protocole 2 :* on divise la population en groupes de n individus (on suppose N divisible par n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs.

2. Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées dans le deuxième protocole. Exprimer l'espérance de Y en fonction de n, N et p.

3. Comparer les deux protocoles pour les valeurs $N = 1000, n = 10$ et $p = 0,01$. On donne $0.99^{10} \simeq 0.904$.

Exercice 6. (Séquences dans des tirages à Pile ou Face)

1. On lance n fois une pièce donnant Pile avec une probabilité p et Face avec une probabilité $q = 1 - p$. On suppose $0 < p < 1$.
   On note B_n l'événement : « Au cours des n premiers lancers, P n'est jamais suivi de F » . Montrer que :

$$\mathbb{P}(B_n) = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q - p} & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = q \end{cases}$$

2. **Première séquence PP.**
   On jette indéfiniment une pièce donnant Pile avec une probabilité p et Face avec une probabilité $q = 1 - p$. On suppose $0 < p < 1$.
   On note X le premier rang d'apparition d'une séquence PP. Par exemple, si on obtient la succession FFFPFFPP, alors $X = 8$. On pose aussi $X = 0$ si PP n'apparaît jamais.

(a) Calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

(b) En discutant selon le résultat du premier lancer, montrer :

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X = n+2) = q\mathbb{P}(X = n+1) + pq\mathbb{P}(X = n)$$

(c) On suppose $p = \frac{2}{3}$. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

(d) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$, $V(X)$.

Exercice 7. (Autour de la loi de Poisson) Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.
2. Calculer la probabilité que X prenne une valeur paire (sous forme d'une somme infinie).

Exercice 8. (Retour de soirée)
Une personne rentre de soirée. Elle dispose d'un trousseau de n clés, dont une seule ouvre sa porte. Elle ne se souvient plus de laquelle il s'agit et décide de toutes les essayer.

1. On suppose d'abord que, si une clé ne fonctionne pas, elle l'élimine du trousseau. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'essais effectués avant de trouver la bonne clé.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$, puis le nombre moyen d'essais avant de trouver la bonne clé.
2. On suppose maintenant que la personne n'a pas la présence d'esprit d'éliminer une clé qui ne fonctionne pas : à chaque essai, elle choisit parmi les n clés. Reprendre les questions du 1.

Exercice 9. (Inférence bayésienne)
On dispose de 3 pièces de monnaie. Les deux premières sont équilibrées, tandis que la troisième tombe toujours sur Face. On choisit au hasard une pièce, et on la lance 3 fois.
Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on note P_i l'événement « choisir la i-ème pièce » , et A l'événement : « obtenir 3 Face » .

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
2. On effectue l'expérience, et les 3 lancers successifs donnent tous Face. Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la pièce biaisée ?
3. On continue à lancer cette même pièce, et on obtient toujours des Face. Au bout de combien de lancers pourra-t-on affirmer avec une certitude de 99% que la pièce choisie est la pièce biaisée ?

Indications

1 …

2
1.
2.
3. Y_i compte le nombre de X_i égaux à 1
4. $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$ sont connues ; en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$
5. Si on est en 0 au temps n, on a sauté combien de fois à gauche ? et à droite ?
6. Formuler $(X = 0)$ comme un événement sur Y.

3
1.
2. On a $X = k$ ssi on tire $k-1$ blanches puis une noire. Attention, le contenu de l'urne varie !
3.

4
1.
2. Loi usuelle. BIEN justifier l'utilisation de cette loi dans le contexte décrit par l'exercice.
3. $(X \leqslant k)$ est réalisé ssi tous les dés ont été lancés moins de k fois à la fin de l'expérience.
4. Commencer par $\mathbb{P}(X_i \leqslant k)$; énumérer les valeurs possibles pour X_i et sommer les probas associées.
5. $\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X = k)$ a été calculée précédemment… où ?

5
1. Commencer par la proba qu'un groupe soit testé négatif. Ensuite : les groupes sont indépendants.
2. Commencer par exprimer Y en fonction de N, n et X. Ne pas oublier les analyses des groupes !
3. Il faut donc comparer le nombre de tests effectués : dans le premier protocole on teste tout le monde !

6
1. Expliciter toutes les successions de n lancers où P n'est jamais suivi de F.
2. (a)
   (b) On note P_1 (resp. F_1) l'événement : obtenir Pile (resp. Face) au premier lancer.
   Justifier que la proba sachant F_1 de $(X = n+2)$ est égale à $\mathbb{P}(X = n+1)$.
   Pour la proba sachant P_1 c'est un peu plus compliqué… sachant qu'on s'intéresse à $(X = n+2)$ avec $n \geqslant 1$, si Pile sort au premier lancer, que doit-il se passer au second lancer ?
   (c) Sortez vos séries géométriques !

7
1. Théorème de transfert… mais il faut justifier l'existence de cette espérance.
2. Sommer les probas des valeurs « permises » .
   La valeur de la somme est accessible mais demande un peu de travail. Commencez par écrire $e^{\lambda} + e^{-\lambda}$ sous forme de somme infinie…

8
1. (a)
   (b) On a $X = k$ ssi les $k-1$ premières clés ne sont pas la bonne, et si la k-ème est la bonne.
   Attention, les expériences successives ne sont pas indépendantes : on élimine les clés déjà testées.
2. Pour $X(\Omega)$ songer que cette fois, au contraire du schéma précédent, on peut choisir arbitrairement longtemps une mauvaise clé.
   Dans ce cas, le trousseau est identique à chaque choix de clé.

9
1. Il faut prendre en compte les 3 choix de pièces possibles. Il y a une formule faite pour ça !
2. Il s'agit donc d'une proba conditionnelle (on sait qu'on a obtenu 3 Face)…
3. Remplacer « 3 lancers » par « n lancers » dans ce qui précède.