

Devoir surveillé n°1 Corrigé

Exercice 1

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x e^{-n/x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.

Il s'agit de calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{n}{x}\right) = -\infty$; donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-n/x} = 0 = f_n(0)$. f_n est donc bien continue à droite en 0.

- (b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n .

On étudie maintenant le taux de variation pour $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-n/x} = 0$$

f_n est donc dérivable à droite en 0, et le nombre dérivé en 0 à droite vaut 0.

2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Pour tout réel x non nul, calculer $f'_n(x)$ puis étudier son signe.

Elle l'est comme composée de fonctions dérivables (dénominateur non nul sur $\mathbb{R}^*$).

$$\forall x \neq 0, f'_n(x) = e^{-n/x} + x \left(\frac{n}{x^2}\right) e^{-n/x} = \left(1 + \frac{n}{x}\right) e^{-n/x}$$

- (b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^- , puis donner le tableau de variations de f_n .

Indication : pour la limite en 0^- on pourra poser $X = -\frac{1}{x}$.

On a facilement (les exponentielles tendent vers 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$. Pour la

limite en 0, en posant $X = -1/x$ il vient $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-n/x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{e^{nX}}{X} = -\infty$ par croissances comparées ($n > 0$).

Pour $x \neq 0$, on a $f'_n(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{n+x}{x} > 0$. On peut effectuer le tableau de signes suivant :

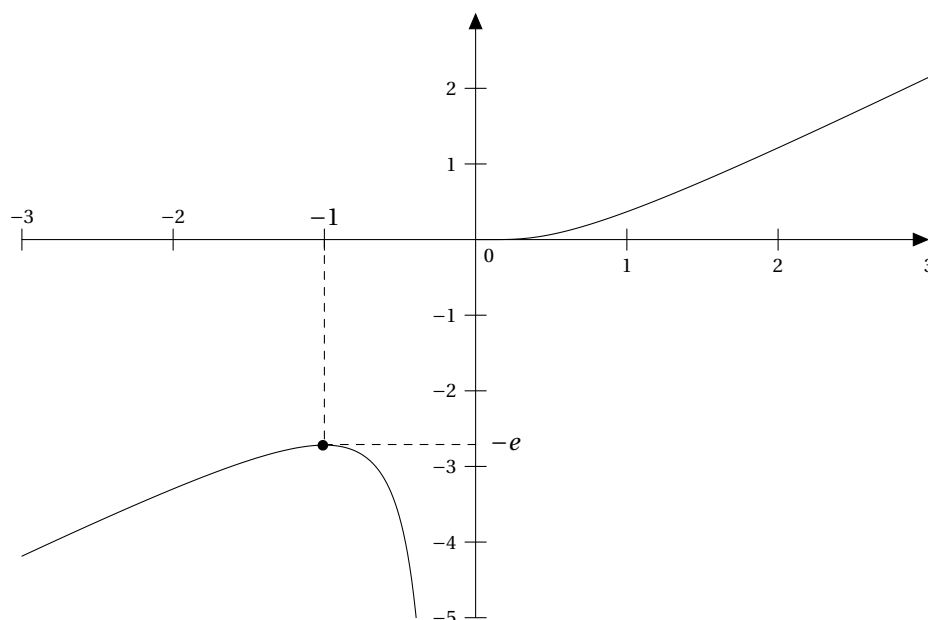
x	$-\infty$	$-n$	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$
$n+x$	$-$	0	$+$	$+$
$f'_n(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f_n(x)$	$-\infty$	$-ne$	0	$+\infty$

- (c) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$.

On fait bien apparaître le max local en $x = -n = -1$ ici ; $f(x) = -e \simeq -2.7$.

Le nombre dérivé à droite en 0 est égale à 0 ; donc la courbe admet une demi-tangente horizontale à droite en 0.

Ensuite on trace quelque chose de raisonnable...



3. (a) **Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n , tel que $f_n(u_n) = 1$.**

D'après le tableau, f est négative sur $\mathbb{R}_-$, donc on se limite à une recherche sur $\mathbb{R}_+^*$.

f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $1 \in \mathbb{R}_+^*$, il admet un unique antécédent $u_n \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc l'existence et l'unicité de u_n , et aussi $u_n > 0$.

- (b) **Vérifier que, pour tout $n \geq 3$, on a $1 < u_n < n$.**

On calcule : $f_n(1) = e^{-n} < 1$ et $f_n(n) = ne^{-1} = \frac{n}{e}$. Avec $n \geq 3$, on a $n > e \approx 2.71$ et donc $f_n(n) > 1$.

Donc $f_n(1) < 1 < f_n(n)$, ce qui donne aussi $f_n(1) < f_n(u_n) < f_n(n)$; par stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit $1 < u_n < n$.

- (c) **En déduire une fonction Python `def dichotomie(n)` calculant, pour un entier $n \geq 3$ passé en argument, une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.**

Dichotomie usuelle ; l'intervalle de recherche initial est $[1, n]$ d'après la question précédente. On propose :

```
def dichotomie(n):
    a = 1
    b = n
    while b-a > 10**(-3):
        c = (a+b)/2
        if c*np.exp(-n/c) > 1: # le point c est "trop loin" :
                                # il faut chercher sur [a,c]
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

4. (a) **Montrer que u_n est solution de l'équation $x \ln(x) = n$.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de u_n , on a $u_n e^{-n/u_n} = 1$, soit $u_n = e^{n/u_n}$, ce qui donne aussi $\ln(u_n) = \frac{n}{u_n}$ et donc $u_n \ln(u_n) = n$.

- (b) **Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x)$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1} , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.**

g est dérivable sur $[1, +\infty[$; $\forall x \geq 1, g'(x) = \ln(x) + 1$. $\ln$ est positive sur $[1, +\infty[$ donc g est strictement croissante sur cet intervalle ; elle est continue donc c'est une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Notons g^{-1} sa réciproque.

La question précédente donne $g(u_n) = n$, soit $u_n = g^{-1}(n)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, on a aussi

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} g^{-1}(y) = +\infty.$$

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}(n) = +\infty$$

- (c) **Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.**

Indication : on pourra s'intéresser à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)}$.

En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Il suffit de passer au $\ln$ dans la relation $u_n \ln(u_n) = n$ trouvée à la question 4a (toutes les quantités en jeu sont strictement positives, car $u_n > 1$).

On forme alors le quotient suggéré par l'énoncé :

$$\frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}$$

Comme $u_n \rightarrow +\infty$, on a aussi $\ln(u_n) \rightarrow +\infty$; et par croissances comparées $\frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} \rightarrow 0$. Ceci donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = 1 + 0 = 1$$

et donc $\ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(u_n)$.

Fin de la question oubliée dans le corrigé distribué :

ON N'EN CONCLUT PAS QUE $u_n \sim n$!!!!

On reprend plutôt la relation $u_n \ln(u_n) = n$, qui fournit avec l'équivalent précédent

$$u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

5. (a) **Montrer que :** $f_n(u_{n+1}) = \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$.

$$\text{On a } f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} \exp\left(-\frac{n}{u_{n+1}}\right) = \underbrace{u_{n+1} \exp\left(-\frac{n}{u_{n+1}}\right)}_{=f_{n+1}(u_{n+1})=1} \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right) = \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right).$$

- (b) **Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.**

Pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{1}{u_{n+1}} > 0$, et donc la question précédente montre que $f_n(u_{n+1}) > 1 = f_n(u_n)$; par stricte croissance de f_n ceci implique que $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

6. On pose $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt$.

- (a) **Montrer que :** $1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$.

On a $f_n(u_n) = 1$ par définition ; $f_n(u_{n+1}) = \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ par la question 5a. f étant strictement croissante sur $[u_n, u_{n+1}]$, on en déduit :

$$\forall t \in [u_n, u_{n+1}], 1 \leq f_n(t) \leq f_n(u_{n+1}) = \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

On intègre cette inégalité sur $[u_n, u_{n+1}]$: les bornes sont dans l'ordre croissant et les fonctions en jeu sont continues. On trouve

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} 1 \, dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) \, dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right) \, dt$$

$$u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n) \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

d'où la réponse en divisant par $u_{n+1} - u_n > 0$.

- (b) **En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.**

Comme $u_n \rightarrow +\infty$, on a $e^{1/u_{n+1}} \rightarrow 0$, et par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 0$$

Ceci donne : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (u_{n+1} - u_n)$.

- (c) **Montrer alors que la série de terme général I_n est divergente.**

(u_n) étant strictement croissante, ce dernier équivalent est positif : par théorème de comparaison de SATP, $\sum I_n$ et $\sum (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature. Or cette dernière série est télescopique...

On rédige : soit $N \geq 1$ et $S_N = \sum_{n=1}^N (u_{n+1} - u_n)$.

Par télescopage, $S_N = u_{N+1} - u_1 \rightarrow +\infty$; d'où la divergence de $\sum (u_{n+1} - u_n)$ puis celle de $\sum I_n$.

Exercice 2

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On donne la valeur approchée : $\ln(2) \simeq 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. (a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables ($1 + x^2 > 0$ pour tout réel x) ; les formules de dérivation usuelles donnent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2}$$

- (b) En déduire le sens de variation de f .

On observe : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

- (c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

On reprend la première expression. De $f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2}$ on tire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -\frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$$

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

On trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \ln(1+x^2) = -\infty$ sans forme indéterminée ; et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(1+x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(1+x^2)}{x} \right) = +\infty$$

par croissances comparées.

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

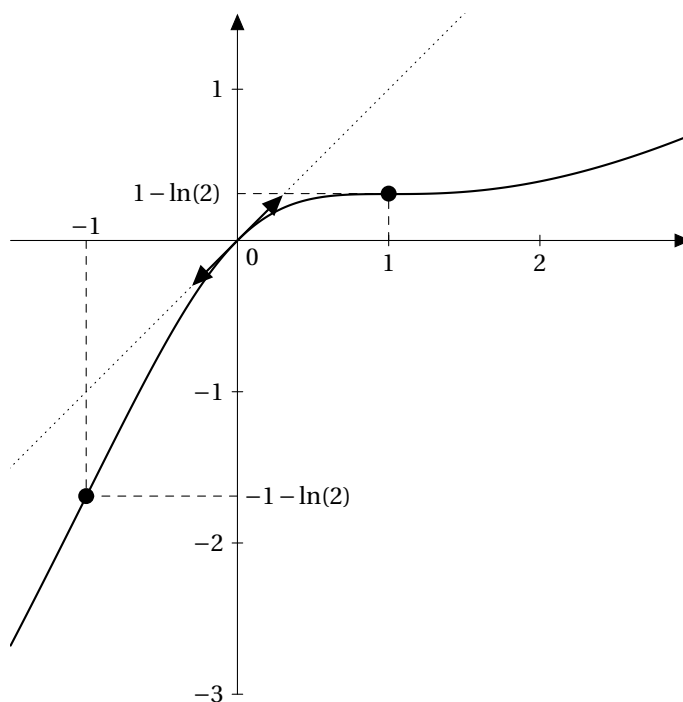
D'après l'expression obtenue plus haut, on voit que f'' s'annule et change de signe deux fois : en $x = -1$ et $x = 1$. Les deux points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sont donc $(-1, f(-1)) = (-1, -1 - \ln(2))$ et $(1, f(1)) = (1, 1 - \ln(2))$.

4. **Tracer $\mathcal{C}$.** On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on représentera la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 après en avoir donnée l'équation.

Bien repérer les deux points d'inflexion de la question précédente (avec la valeur approchée $\ln(2) \simeq 0.69$ donnée !) ; $f(0) = 0$; la croissance de f sur $\mathbb{R}$; $f'(1) = 0$ qui donne une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ce qui donne $y = x$ (« première bissectrice » représentée en pointillés).

Traditionnellement on met une double flèche au point concerné, de pente égale à la pente de la tangente (ici, $f'(0) = 1$).



Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

5. **Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + (u_n)^2)$. $1 + (u_n)^2 \geq 1$ donc $\ln(1 + (u_n)^2) \geq 0$; on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

et donc que (u_n) décroît.

6. **Établir que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.**

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$:

- $u_0 = 1 \geq 0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose $u_n \geq 0$. Alors $f(u_n) \geq f(0) = 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$.

Par récurrence on conclut : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$.

Dès lors la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en ℓ , et le théorème du point fixe donne $f(\ell) = \ell$.

Or :

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ln(1 + \ell^2) = 0 \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

et on conclut que la suite (u_n) converge vers 0.

7. (a) **Établir :** $\forall x \in [0, 1], f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.

On pose $g(x) = f(x) - x + \frac{1}{2}x^2$.
 g est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1], g'(x) = f'(x) - 1 + x = \frac{(x-1)^2}{1+x^2} - 1 + x = \frac{x^3 - x}{1+x^2} = \frac{x^2(x-1)}{1+x^2}$$

g est donc décroissante sur $[0, 1]$. Comme $g(0) = f(0) - 0 = 0$, on a g négative sur $[0, 1]$ ce qui donne bien

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$$

- (b) **En déduire :** $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n)^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.

On l'applique l'inégalité précédente à u_n ; mais il faut montrer que $u_n \in [0, 1]$!
 $u_0 = 1$, et (u_n) est décroissante minorée par 0 ce qui montre : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in [0, 1]$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n - \frac{1}{2}(u_n)^2$$

ce qui donne après quelques manipulations $(u_n)^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.

- (c) **Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} (u_n)^2$ converge.**

$\sum (u_n)^2$ est une série à termes positifs donc on va utiliser la comparaison qu'on vient d'obtenir.
 $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est télescopique. On écrit, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1} \rightarrow u_0 \text{ car } u_N \rightarrow 0$$

Donc la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente. Par comparaison de série termes positifs, la série $\sum (u_n)^2$ converge.

Partie III : Un équivalent de u_n

Dans cette partie, on rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

8. **Déterminer** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + (u_n)^2)}{u_n}$. **En déduire** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Avec $u_n \rightarrow 0$ on utilise l'équivalent classique :

$$\frac{\ln(1 + (u_n)^2)}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(u_n)^2}{u_n} = u_n$$

Comme $u_n \rightarrow 0$ on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + (u_n)^2)}{u_n} = 0$.

Ensuite

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1 + (u_n)^2)}{u_n} = 1 - \frac{\ln(1 + (u_n)^2)}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

9. **Montrer que**

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{\ln(1 + (u_n)^2)}{u_n u_{n+1}}$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) = 1$.

Calcul direct, en utilisant la relation de récurrence définissant (u_n) :

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{\ln(1 + (u_n)^2)}{u_n u_{n+1}}$$

On cherche un équivalent ; la question précédente donne $u_n \sim u_{n+1}$.

On trouve alors

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{\ln(1 + (u_n)^2)}{u_n u_{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(u_n)^2}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

Ce dernier quotient tend vers 1 ; ce qui permet bien de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) = 1$.

On admet ici le théorème de Cesàro :

Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k \right) = \ell$$

10. **Montrer que** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n} = 1$, **et en déduire un équivalent de u_n pour $n \rightarrow +\infty$.**

On applique Cesàro à la suite $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, qui tend vers 1. Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \frac{1}{u_n} - 1$$

et on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{nu_n} - \frac{1}{n} \right) = 1$$

et comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ on conclut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n} = 1$.

Ceci s'écrit encore (car $1 \neq 0$) : $\frac{1}{nu_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, donc $nu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ par passage à l'inverse ; et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Partie IV : Python

11. **Écrire une fonction Python `liste_termes(N)` qui renvoie le `np.array` $[u_0, u_1, \dots, u_N]$ où (u_n) est la suite définie dans les questions précédentes.**
(faute de frappe dans le sujet)

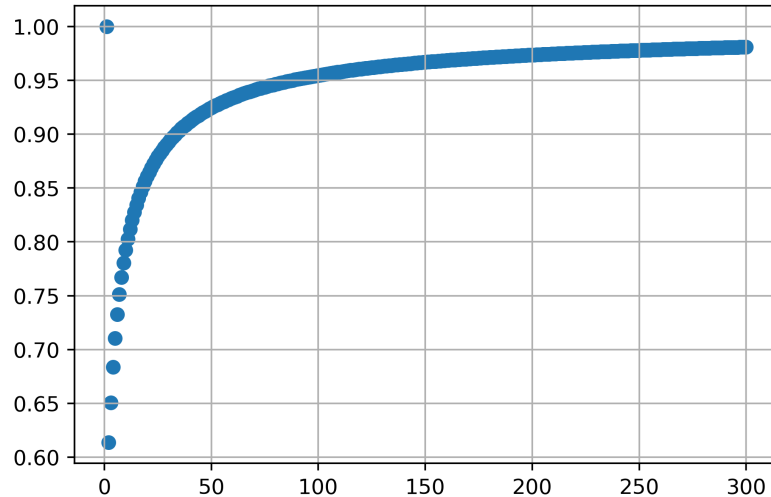
Classique :

```
def liste_termes(N):
    u=1
    L=[1]
    for k in range(N):
        u = u - np.log(1+u**2)
        L.append(u)
    return L
```

12. **On tape alors**

```
N = np.arange(1,301)
U = liste_termes(300)
L = N*U[1:]
plt.scatter(N,L)
plt.show()
```

et on obtient le dessin suivant :



(a) **Décrire le contenu des listes N, U et L après exécution de ces commandes.**

Le code définit des objets de type array :

- `np.arange(1,301)` est l'array $[1, 2, 3, \dots, 300]$
- U est l'array $[u_0, u_1, \dots, u_{300}]$; donc `U[1:]` est l'array $[u_1, \dots, u_{300}]$
- Par opérations, L est donc l'array $[1\ u_1, 2\ u_2, \dots, 300\ u_{300}]$.

(b) **Quel résultat obtenu dans les questions précédentes est illustré par ce dessin ? Expliquer.**

D'après le contenu des listes N et L, le graphique donne la valeur de nu_n en fonction de n pour $n \in \llbracket 1, 300 \rrbracket$.

À sa vue, il semble que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$. Cela confirme donc que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes > 0 . On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On suppose que la série de terme général u_n diverge.

1. **Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$?**

Comme la série de terme général u_n est à termes positifs, (S_n) est croissante ; or elle diverge donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

2. **Montrer que : $\forall n \geq 1, \frac{u_n}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$.**

Pour $n \geq 1$, $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$; on a donc

$$\frac{u_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$$

3. **On suppose que $\frac{S_{n-1}}{S_n}$ ne tend pas vers 1 pour $n \rightarrow +\infty$.**

Donner la nature de $\sum \frac{u_n}{S_n}$.

Si $\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ ne tend pas vers 1, alors avec la question 2, $\left(\frac{u_n}{S_n}\right)$ ne tend pas vers 0 ; donc la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge grossièrement.

4. On suppose maintenant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1$.

(a) Montrer que

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_n}$$

On écrit

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1} + (S_n - S_{n-1})}{S_{n-1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{u_n}{S_{n-1}}\right)$$

Or $\frac{u_n}{S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \underbrace{\frac{S_n}{S_{n-1}}}_{\rightarrow 1} - 1$ est de limite nulle (erreur dans le corrigé distribué)

; avec l'équivalent classique du $\ln$ on a :

$$\ln\left(1 + \frac{u_n}{S_{n-1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_{n-1}}$$

De plus $\frac{S_{n-1}}{S_n} \rightarrow 1$ donc $S_{n-1} \sim S_n$; ce qui donne finalement

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_n}$$

(b) Conclure que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

On vient de voir que $\frac{u_n}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$. $\frac{u_n}{S_n} > 0$ donc le théorème de comparaison de SATP s'applique, et on en déduit que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ et $\sum \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ sont de même nature.

Or $\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ est télescopique !

Comme dans l'exercice 1, on en déduit que $\sum \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ a même nature que la suite $(\ln(S_n))$; et avec $S_n \rightarrow +\infty$ on a $\ln(S_n) \rightarrow +\infty$.

On en conclut que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

5. Soit $\sum u_n$ une suite à termes strictement positifs, divergente. Construire une série $\sum v_n$ à termes strictement positifs telle que :

- $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$;
- $\sum v_n$ diverge.

Montrons que $v_n = \frac{u_n}{S_n}$ convient.

L'exercice précédent, qui s'applique car $\sum u_n$ est supposée à termes > 0 et divergente, montre que $\sum v_n$ diverge ; de plus $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{S_n} \rightarrow 0$ car on a vu $S_n \rightarrow +\infty$. Ceci donne bien $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$.

NB : on a montré que pour toute SATP divergente, on peut trouver une autre SATP de terme général infiniment plus petit, qui diverge encore !