Devoir surveillé n°1

27/09/2025

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x\,e^{-n/x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   (b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.
   Indication : pour la limite en 0^- on pourra poser $\mathrm{X} = -\dfrac{1}{x}$.
   (c) Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_1$.
3. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
   (b) Vérifier que, pour tout $n \geqslant 3$, on a $1 < u_n < n$.
   (c) En déduire une fonction Python `def dicho(n)` calculant, pour un entier $n \geqslant 3$ passé en argument, une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.
4. (a) Montrer que u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.
   (b) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x\ln(x)$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (c) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   Indication : on pourra s'intéresser à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)}$.
   En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
5. (a) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = \exp\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.
6. On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que : $1 \leqslant \dfrac{\mathrm{I}_n}{u_{n+1} - u_n} \leqslant \exp\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$.
   (b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   (c) Montrer alors que la série de terme général I_n est divergente.

Exercice 2

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathscr{C}^2$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right)$$

et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \simeq 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathscr{C}$

1. (a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variation de f.
   (c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
4. Tracer $\mathscr{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on représentera la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 après en avoir donnée l'équation.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.
6. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.
7. (a) Établir : $\forall\, x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n)^2 \leqslant 2\,(u_n - u_{n+1})$.
   (c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n)^2$ converge.

Partie III : Un équivalent de u_n

Dans cette partie, on rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

8. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+(u_n)^2\right)}{u_n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
9. Montrer que

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{\ln(1+(u_n)^2)}{u_n u_{n+1}}$$

   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right) = 1$.

On admet ici le théorème de Cesàro :

> Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors :
>
> $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) = \ell$$

10. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n u_n} = 1$, et en déduire un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$.

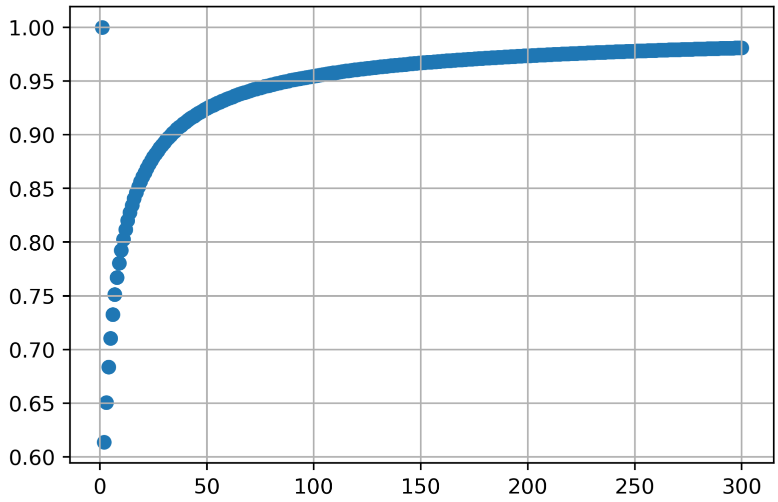
Partie IV : Python

11. Écrire une fonction Python `liste_termes(N)` qui renvoie le `np.array` $[u_1, u_2, \dots, u_N]$ où (u_n) est la suite définie dans les questions précédentes.

12. On tape alors

```
N = np.arange(1,301)
U = liste_termes(300)
L = N*U[1:]
plt.scatter(N,L)
plt.show()
```

et on obtient le dessin suivant :



(a) Décrire le contenu des listes `N`, `U` et `L` après exécution de ces commandes.

(b) Quel résultat obtenu dans les questions précédentes est illustré par ce dessin ? Expliquer.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes > 0. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose que la série de terme général u_n diverge.

1. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$?

2. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 1,\ \dfrac{u_n}{S_n} = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$.

3. On suppose que $\dfrac{S_{n-1}}{S_n}$ ne tend pas vers 1 pour $n \to +\infty$.
Donner la nature de $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$.

4. On suppose maintenant $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{n-1}}{S_n} = 1$.

   (a) Montrer que
$$\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_n}$$

   (b) Conclure que $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.

5. Soit $\sum u_n$ une suite à termes strictement positifs, divergente. Construire une série $\sum v_n$ à termes strictement positifs telle que :

- $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$;
- $\sum v_n$ diverge.