Devoir maison n°1
Facultatif
À rendre le 9/10

Exercice 1 (Suites et séries)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$, et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier la fonction f (variations, valeurs particulières, limites). Tracer un aperçu de la courbe représentative de f.
2. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2}$. Montrer que (u_n) est monotone ; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

On évalue maintenant la vitesse de convergence de (u_n) vers $\sqrt{2}$.

3. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|u_n - \sqrt{2}\right|^2$.
4. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-2^{n-2}}$.
5. Donner une valeur de n telle que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-100}$. *NB : pour ce n, u_n est donc une approximation de $\sqrt{2}$ à une précision de 100 décimales...*
6. Écrire une fonction Python `approx(epsilon)` qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie le premier terme de (u_n) tel que $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2 (Probabilités)

1. On lance n fois une pièce donnant Pile avec une probabilité p et Face avec une probabilité $q = 1 - p$. On suppose $0 < p < 1$.
   On note B_n l'événement : « Au cours des n premiers lancers, P n'est jamais suivi de F » . Montrer que :
$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q - p} & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = q \end{cases}$$
2. **Première séquence PP.**
   On jette indéfiniment une pièce donnant Pile avec une probabilité p et Face avec une probabilité $q = 1 - p$. On suppose $0 < p < 1$.
   On note X le premier rang d'apparition d'une séquence PP. Par exemple, si on obtient la succession FFFPFFPP, alors $\mathrm{X} = 8$. On pose aussi $\mathrm{X} = 0$ si PP n'apparaît jamais.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.
   (b) En discutant selon le résultat du premier lancer, montrer :
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = n+2) = q\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = n+1) + pq\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = n)$$
   (c) On suppose $p = \dfrac{2}{3}$. Montrer
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$
   (d) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right)$, $\mathrm{V}(\mathrm{X})$.