Devoir maison n°1bis
Facultatif
À rendre le 9/10

Exercice 1 (Suites et séries)

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$; strictement croissante à partir du rang 2.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Dans toute la suite du problème, a **et** b **(avec** $a > b$**) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante :** $x^2 - x - 1 = 0$.

2. (a) Calculer a et b. Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir les encadrements suivants : $1 < a < 2$; $-1 < b < 0$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.
   (c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{2^n} = 0$.
4. Montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$.
5. Pour $N \geqslant 1$, on note $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.
   (a) Montrer que $S = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N$ existe.
   (b) Montrer : $\forall\, N \geqslant 1, S_N = 4S_{N+2} - 2S_{N+1} - 1$.
   On pourra utiliser la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).
   (c) Donner la valeur de S.
6. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - a u_n$. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = b^n$.
7. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
   (a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor a u_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.
   On pourra utiliser la définition de β_n.
   (b) Exprimer pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\lfloor a u_{2n-1} \rfloor$ en fonction de u_{2n}.

Exercice 2 (Probabilités)

On dispose d'une pièce équilibrée, qu'on lance de manière répétée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce donne Face au n-ième lancer, et 0 si elle donne Pile au n-ième lancer.

Soit $p \in [0,1]$ quelconque ; on souhaite, à partir de lancers indépendants de cette pièce, créer une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p.

1. Proposer une expérience pour $p = \dfrac{1}{4}$; puis pour $p = \dfrac{1}{2^n}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
2. On s'intéresse au protocole suivant: « On jette la pièce jusqu'à l'obtention d'un Face. Si le premier Face est obtenu lors d'un lancer pair, on considère qu'il y a succès, sinon il y a échec » .
   On note S_n : « obtenir un succès au n-ième lancer » , et S : « obtenir un succès » . Donner $\mathbb{P}(S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; en déduire que $\mathbb{P}(S) = \dfrac{1}{3}$.

On considère maintenant un réel p qui s'écrit sous la forme :

$$p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} \qquad \text{où} : \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in \{0,1\}$$

3. Montrer que la série définissant p est convergente.

4. (a) On jette la pièce jusqu'à l'obtention d'un Face. On note n le numéro du lancer correspondant à ce premier Face et on pose $\mathrm{Y} = a_n$.
   On note A_n l'événement : « on obtient le premier Face au n-ième lancer » . Vérifier que

   $$\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{Y} = 1) = a_n$$

   (on pourra discuter suivant les valeurs de a_n).

   (b) En déduire que $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

   (c) Que vaut a_n en fonction de n dans le cas de la question 2 ?

5. Application. Montrer que :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{3+4n}} + \frac{1}{2^{4+4n}} \right) = \frac{1}{5}$$

   En déduire un protocole expérimental renvoyant un « succès » (à définir) de probabilité $\frac{1}{5}$.

Remarque : on peut en fait montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ existe et est unique pour tout $p \in [0,1]$: il s'agit du *développement binaire* de p.