Variables aléatoires discrètes

Exercices

Exercice 1. **(*)** Dans les situations suivantes, reconnaître la loi usuelle suivie par la variable X, donner ses paramètres, son espérance et sa variance.
On prendra soin de citer les hypothèses qui permettent de justifier la loi (notamment l'indépendance) en se référant à l'énoncé.

1. Au loto, un ticket est gagnant avec probabilité p. Une personne achète un ticket par jour. X est le nombre de tickets qu'il est nécessaire d'acheter pour obtenir un ticket gagnant.
2. On considère 3 urnes U_1, U_2, U_3 dans lesquelles on jette n boules. Les n boules sont indépendantes, et une boule va dans U_1, U_2 ou U_3 de manière équiprobable.
X est le nombre de boules dans U_1.
3. 10 personnes montent dans un ascenseur qui dessert 5 étages. Chaque personne choisit un étage de manière équiprobable ; les choix des différentes personnes sont indépendants. X est le nombre de personnes choisissant le 3ème étage.
4. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages avec remise ; on note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule noire.
5. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher. On effectue n tirages avec remise. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, X est la variable aléatoire donnant le numéro de la boule tirée au k-ème tirage.

Exercice 2. **(*)**
Soit X,Y un couple de variables aléatoires à valeurs dans $[\![0,2]\!]^2$, dont la loi conjointe est donnée par : ,

X\Y	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

1. Donner les lois marginales de X et Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner la loi conditionnelle de X sachant $(Y = 1)$.
4. Donner la loi de $X + Y$.
5. Donner la loi de $\min(X, Y)$.

Exercice 3. **(*)**
On lance de manière répétée une pièce donnant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$; les différents lancers sont indépendants. On note X le rang du premier Pile obtenu, et Y le rang du second Pile obtenu.

1. Donner la loi de X.

2. Calculer $\mathbb{P}\big((X = i) \cap (Y = j)\big)$ pour tous entiers $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$; en déduire la loi de Y.

3. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Montrer que $\mathbb{E}(Y)$ existe et la calculer.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$ (avec $p \in]0,1[$).

1. Donner la loi du couple (X, Y).

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X \geqslant k)$. En déduire la loi de $\min(X, Y)$; reconnaître cette loi.

3. Déterminer les lois de $\max(X, Y)$ et de $X + Y$.

4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant Y)$

Exercice 5. (*)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi $\mathscr{G}(p)$. Déterminer les lois de $U = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $V = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercice 6. Soit n un entier $\geqslant 3$. Une urne contient 2 boules blanches indiscernables et $n-2$ boules noires indiscernables. On tire une à une, sans remise, toutes les boules de l'urne. On note X le rang du tirage de la première boule blanche et Y le rang du tirage de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

2. Soit $k \in X(\Omega)$; déterminer $\text{Card}\,(X = k)$. En déduire la loi de X.

3. De même, déterminer la loi de Y.

4. Déterminer $\text{Card}\big((X = k) \cap (Y = \ell)\big)$ (on distinguera suivant $k < \ell$ ou $k \geqslant \ell$). Donner la loi conjointe de X et Y. Retrouver à partir de celle-ci les lois marginales de X et de Y.

5. X et Y sont-elles indépendantes ?

6. Calculer $E(Y)$.

Exercice 7. Dans un magasin, on modélise le nombre de clients dans une journée par une VAD X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
La probabilité qu'un client effectue un achat dans le magasin est égale à p (avec $p \in]0,1[$). On note Y le nombre de clients effectuant un achat dans la journée.

1. Déterminer la loi de Y sachant $(X = n)$

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4. Déterminer la loi de $X - Y$.

5. (a) Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.
   (b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 8. Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. p personnes montent dans un ascenseur au rez-de-chaussée d'un immeuble. L'ascenseur peut monter aux étages $1, 2, \ldots, n$. Chaque personne appuie sur un étage ; les p personnes agissent de manière indépendante. On cherche à déterminer l'espérance du nombre de boutons allumés (noté N).
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle X_i la variable aléatoire valant 1 si le bouton de l'étage i est allumé et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X_i.

2. Exprimer la variable aléatoire N en fonction des X_i. En déduire $\mathbb{E}(N)$.

3. Compléter la fonction Python `ascenseur` suivante qui prend en arguments les entiers n et p et renvoie une valeur de N.
Dans ce code, le `np.array` `boutons` a autant de composantes que d'étages de l'immeuble ; la composante d'indice i vaut 1 ssi le bouton de l'étage $i+1$ est allumé, et 0 sinon.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def ascenseur(n,p):
    boutons=np.zeros(...)
    for k in ... :
        choix_etage=...
        if ...
            ...
# dans les deux lignes précédentes, on met à jour l'état des boutons
# en prenant en compte l'étage choisi par la personne k
    return ...
```

4. On cherche maintenant à calculer la variance de N.

   (a) Soient $i \neq j$. Montrer que le produit $(1-X_i)(1-X_j)$ est une variable de Bernoulli, et donner son paramètre.

   (b) En déduire $\mathbb{E}(X_iX_j) = 2\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^n - \left(1-\dfrac{2}{p}\right)^n - 1$.

   (c) Justifier que $N^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j$.

   (d) Calculer $\mathbb{E}(N^2)$ puis $V(N)$.

Exercice 9. On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge.
À chaque tour, on tire une boule, puis on la remet dans l'urne, et on ajoute à l'urne une boule de la couleur de celle qui vient d'être tirée.
Ainsi si la première boule tirée est blanche, l'urne contiendra, avant le deuxième tirage, deux boules blanches et une boule rouge.
Les boules sont indiscernables au toucher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n (resp. R_n) l'événement : on tire une boule blanche (resp. rouge) au n-ième tour de jeu ; et X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages.

1. Donner la loi de probabilité de X_1, puis celle de X_2.

2. On va montrer par récurrence que X_n suit la loi uniforme $\mathscr{U}([\![0,n]\!])$. L'initialisation est vue en question 1. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ fixé ; on suppose que $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0,n]\!])$.

   (a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Justifier que $(X_{n+1}=k) = \big((X_n=k)\cap R_{n+1}\big) \cup \big((X_n=k-1)\cap B_{n+1}\big)$.

   (b) Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(B_{n+1})$.

   (c) Déduire de ce qui précède que : $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \dfrac{1}{n+2}$.

   (d) Montrer que $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0,n+1]\!])$ et conclure.

3. On cherche à vérifier expérimentalement ce résultat à l'aide de Python.

   (a) Compléter la fonction suivante, qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie un tirage aléatoire de X_n.

```
def Xn(n):
    # contenu initial de l'urne
    r = 1
    b = 1
    # compteur de boules blanches tirées
    X = 0
    for k ..... :
        if rd.random() < .... : # tirage d'une blanche
            ...
            ...
        else : # tirage d'une rouge
            ...
    return ...
```

(b) Écrire une suite d'instructions qui effectue 100000 tirages de X_{20} et affiche une liste `L` de taille 21 ; où `L[k]` est le nombre de tirages pour lesquels on a obtenu $X_{20} = k$.

(c) Après exécution de ces instructions on obtient :

```
[4699. 4735. 4833. 4852. 4717. 4882. 4699. 4832. 4631. 4718. 4827.
4774. 4703. 4773. 4707. 4801. 4781. 4740. 4808. 4760. 4728.]
```

Est-ce cohérent ?

Exercice 10. On désigne par n un entier naturel non nul.
On lance n fois une pièce de monnaie donnant « Pile » avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$.
On appelle *k-chaîne de « Pile »* une suite de k lancers consécutifs ayant tous donnés « Pile » , cette suite devant être précédée d'un « Face » ou débuter le tirage, et suivie d'un « Face » ou terminer le tirage.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$ on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de « Pile » obtenues au cours des n lancers.

Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats P, P, F, F, P, P, P, F, P, F, P, alors $Y_1 = 2$ (deux 1-chaînes aux lancers 9 et 11) ; $Y_2 = 1$ (une 2-chaîne aux lancers 1 et 2) ; $Y_3 = 1$ (une 3-chaîne aux lancers 5,6,7) ; et pour tout $k \geqslant 4$, $Y_k = 0$.
Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$ l'espérance de Y_k, notée $E(Y_k)$.

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on pourra noter P_k l'événement : « on obtient « Pile » au k-ème lancer » , et F_k l'événement : « on obtient « Face » au k-ème lancer » .

1. Simulation informatique.

(a) Compléter le code de la fonction suivante , qui renvoie les longueurs des k-chaînes de Pile rencontrées sur une succession de n tirages.
Par exemple, sur les 11 tirages décrits précédemment, on obtient ***P,P****,F,F,****P,P,P****,F,****P****,F,****P****, et la fonction renverra* `[2,3,1,1]`.

```
def chaines(n,p):
    """ simule l'expérience décrite sur n lancers,
    avec une proba p de faire Pile """
    L=[] # contiendra les longueurs des chaînes successives
    i=0 # comptera la longueur d'une chaîne de Pile
    for k in ... :
        if ... : # le lancer renvoie Pile
            i = ...
        else:
            if ... : # si chaîne non vide
                ... # on ajoute sa longueur à la liste
            i = ...
    if i>0 : # pour une dernière chaîne !!
        ....
    return L
```

(b) En déduire une commande, utilisant cette fonction, qui renvoie, pour une expérience donnée, la liste $[Y_1(\omega), Y_2(\omega), ..., Y_n(\omega)]$.

2. Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.

3. Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$. et donner $E(Y_{n-1})$.

4. Dans cette question, k désigne un entier de $[\![1, n-2]\!]$.
Pour tout i de $[\![1, n]\!]$ on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de « Pile » commence au i-ème lancer et qui vaut 0 sinon.

(a) Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.

(b) Soit $i \in [\![2, n-k]\!]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.

(c) Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.

(d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$, puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 11 (EDHEC 2022)**.** On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés $1, 2, \dots, n$, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.
Pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note R_k l'événement : « le joueur réussit le niveau k » .

1. Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur pour p.

```python
import numpy.random as rd
p = float(input(' entrez la valeur de p dans ]0;1[ :'))
n = int(input(' entrez la valeur de n :'))
X = ...
while ... and rd.random() <= p :
    X = ...
print('le niveau du joueur est :',X)
```

2. (a) Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

(b) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X_n = 0)$.

(c) Écrire l'événement $(X_n = n)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$.

(d) Écrire, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, l'événement $(X_n = k)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X_n = k)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

3. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$.

4. (a) Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière en fonction d'une somme dépendant de n et de p, qu'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$, on a $\mathbb{P}(X_n = k) = p^k q$.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer $a_k = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$.

(c) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = a_k$.
NB : les cubes auront reconnu $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

(d) On pose $Y = X+1$. Reconnaître la loi de Y puis en déduire l'espérance de X. Comparer $\mathbb{E}(X)$ et $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 12.

1. On effectue 10000 lancers d'une pièce équilibrée. Majorer la probabilité d'obtenir plus de 6000 Pile.
2. Un avion possède 200 sièges. Une personne donnée a une probabilité 0.05 de rater l'avion. La compagnie pratique le surbooking, et vend 205 billets.
Quelle est la probabilité que tous les passagers qui se présentent ne puissent pas rentrer dans l'avion ?

Un peu plus théorique

Exercice 13 (Implications et inclusions)**.**
On rappelle que si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$. On donne ici quelques exemples de raisonnements qui permettent de passer d'une implication logique à une inégalité sur les probabilités.

1. Soit X une variable aléatoire, et a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.
   (a) Justifier rigoureusement que $(X \leqslant a) \subset (X \leqslant b)$.
   (b) En déduire la monotonie de la *fonction de répartition* de X, définie par $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$.
2. On effectue une succession illimitée de lancers d'une pièce de monnaie. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement : « le premier Pile arrive après le k-ème lancer » .
Donner la monotonie de la suite $\big(\mathbb{P}(A_k)\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$.
3. Dans une urne contenant initialement un certain nombre de boules rouges et de boules bleues, on effectue des tirages successifs. Si on tire une boule rouge, on l'enlève de l'urne, et on la remplace par une bleue ; si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle Y_n le nombre de boules rouges dans l'urne après n tirages.
Montrer que $\mathbb{P}(Y_n = 0) \leqslant \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0)$. En déduire la convergence de la suite $\big(\mathbb{P}(Y_n = 0)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 14 (Indicatrices)**.**
Soit A un événement. On définit la variable aléatoire de Bernoulli $\mathbb{1}_A$ de la manière suivante :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \text{ ssi } \omega \in A, \text{ et } \mathbb{1}_A(\omega) = 0 \text{ sinon}$$

Autrement dit $\mathbb{1}_A = 1$ ssi l'événement A est réalisé.
On appelle $\mathbb{1}_A$ l'*indicatrice de l'événement A.*

1. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_A$. En déduire $E(\mathbb{1}_A)$ et $V(\mathbb{1}_A)$.
2. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
3. Montrer que si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ est la variable constante égale à 1.
4. Montrer que $\mathbb{P}\big((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1)\big) = \mathbb{P}(A \cap B)$.
En déduire que si $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes, alors A et B sont indépendants.

5. On rappelle que si A et B sont des événements indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également, ainsi que les événements A et $\overline{B}$, et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
   Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes.

6. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

Exercice 15 (Markov avec les indicatrices)**.**

1. *Préliminaire : un résultat de domination.* Soient X et Y deux variables positives telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = I$.
   On suppose : $\forall\, \omega \in \Omega,\ Y(\omega) \leqslant X(\omega)$.
   Montrer que si $\mathbb{E}(X)$ existe, alors $\mathbb{E}(Y)$ existe ; et comparer les valeurs de ces espérances.

Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance, et $\lambda > 0$. On considère la variable aléatoire $Y = \lambda \times \mathbb{1}_{(X \geqslant \lambda)}$.

2. Soit $\omega \in \Omega$. Comparer $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ dans les cas suivants :
   - $X(\omega) \geqslant \lambda$
   - $X(\omega) < \lambda$

3. En se souvenant de la valeur de $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$, montrer que $\mathbb{E}(X) \geqslant \lambda \mathbb{P}(X \geqslant \lambda)$; puis retrouver l'inégalité de Markov.

Exercice 16 (Markov et les queues de distribution)**.** Soit X une variable aléatoire.

1. On suppose que X admet une espérance.
   (a) Montrer que $|X|$ admet une espérance.
   (b) Soit $t > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant t) + \mathbb{P}(X \leqslant -t) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{t}$.
   Ainsi, on obtient une borne sur la vitesse de décroissance de la « queue de distribution ».

2. Soit maintenant $r \in \mathbb{N}^*$; on suppose que X^r admet une espérance.
   Soit $t > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant t) + \mathbb{P}(X \leqslant -t) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|^r)}{t^r}$.
   Ainsi, plus X admet des moments d'ordre élevé, plus la queue de distribution décroît vite.

Indications

2
1.
2. Comparer $P\big((X=x)\cap(Y=y)\big)$ à $P(X=x)\times P(Y=y)$ pour des valeurs de x et y bien choisies.
3.
4. Pour des k convenables, détailler toutes les possibilités qui mènent à $X+Y=k$
5. On raisonne comme dans le point précédent.

3
1.
2. Une fois n'est pas coutume, il est plus pratique de considérer l'événement $(X=i)\cap(Y=j)$. À quelle(s) succession(s) de lancers correspond-il ?
3. Le premier Pile arrive avant le second... mais cette phrase seule ne constitue pas une preuve.
4.

4
1.
2. Pour calculer $P(X\geqslant k)$, on peut sommer les $P(X=i)$ pour $i\geqslant k$. Dans le cas précis de la loi géométrique il existe un raccourci : interpréter l'événement $(X\geqslant k)$ en termes de succès/échecs.
3. Pour $X+Y$: pour quelles valeurs de X et Y a-t-on $X+Y=k$?

5 C'est du cours !!

6
1.
2. On est en équiprobabilité. Qu'est-ce ici qu'une « issue » ? Compter alors le nombre total d'issues.
   Puis compter le nombre d'issues menant à $(X=k)$
3. De même,...
4. Ici encore dénombrer les issues menant à l'événement qui nous intéresse.
5.
6.

7
1. Nombre d'acheteurs sur n clients... prendre le temps de justifier correctement.
2.
3. Manière habituelle de retrouver une marginale à partir de la conjointe... les calculs ne sont pas évidents, faire apparaître des séries exponentielles. Et se souvenir que $P_{(X=n)}(Y=k)$ peut, dans certains cas, être nulle !!
4. On peut procéder par probas totales ; ou se demander quelle signification donner à la valeur de $X-Y$ dans le contexte de l'exercice ?
5. (a) Appliquer la définition.
   (b) Utiliser l'indépendance de Y et $X-Y$!

8
1. L'événement $(X_i=0)$ est beaucoup plus maniable que $(X_i=1)$.
2. N compte le nombre de X_i égaux à 1.
3. Le choix de l'étage est aléatoire. Si on appuie sur un bouton déjà allumé, il ne se passe rien ; si on appuie sur un bouton éteint il s'allume.

9
1. pas de souci pour X_1 ; pour X_2 passer par les conditionnelles suivant le résultat du premier lancer.
2. (a) Traduire « en français » le gros événement proposé par l'énoncé.
   (b)
   (c) C'est là qu'intervient l'hypothèse de récurrence.
   (d) « compléter » la loi de X_{n+1} ; conclure sur le but déclaré de cette suite de questions.
3. Ne pas oublier de faire évoluer le contenu de l'urne.
4.
5.

10
1. (a)
   (b) Il faut donc compter le nombre de 1 dans le résultat renvoyé par la fonction de la question précédente ; puis le nombre de 2 ; etc...
2. Quelles sont les possibilités pour obtenir une (ou des) n-chaîne(s) sur n lancers ?
3. Et pour des $(n-1)$-chaînes ? Cette fois il y a 2 possibilités (à décrire en événements)
4. (a) Ne pas oublier le Face qui conclut la k-chaîne de Pile.
   (b) Idem... mais cette fois il faut aussi que la chaîne commence *exactement* au lancer i.
   (c) Ici encore : il faut prendre en compte le fait que certains lancers tombent sur Face.
   (d) $Y_k=\sum_i X_{i,k}$ mais bien réfléchir aux bornes de cette somme : où peut commencer une k-chaîne ?

11 1.

2. (a) Pour une justification soigneuse, expliciter, pour chaque valeur $k \in X_n(\Omega)$ un « scénario » qui mène à $X_n = k$.
   (b)
   (c) Quelle succession d'événements (en partant du début du jeu !) mène à $(X_n = n)$?
   (d) idem.
3.
4. (a) On trouve $E(X_n) = (1-p)p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n$.
   (b) Série usuelle !
5. (a) $n \leqslant k+1 \Leftrightarrow k \leqslant n-1$: déjà vu !
   (b) Il n'y a aucun calcul à faire ici.
   (c) Cours : il y a des conditions simples pour qu'une suite (a_k) soit la loi de proba d'une certaine variable aléatoire.
   (d)

12 BT

13 Dans les trois cas : il faut savoir mettre en relation une implication entre deux propriétés $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{P}'$ et une inclusion entre les événements « $\mathscr{P}$ est réalisée » et « $\mathscr{P}'$ est réalisée » .

14 1. Comme le précise l'énoncé, on a $A = (\mathbb{1}_A = 1)$ (égalité entre événements).
2. Montrer que si $\omega \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$.
   Puis traiter les autres possibilités pour l'issue ω.
3. Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements, et si ω est une issue, à combien de A_i appartient ω ? Essayez de justifier le plus rigoureusement possible.
4. Revenir à la définition de l'indépendance d'événements.
5. Noter que $\overline{A} = (\mathbb{1}_A = 0)$.
6. Vérifier cela pour toute issue ω en distinguant plusieurs cas : $\omega \in A$ ou pas ; $\omega \in B$ ou pas.

15 1. C'est une affaire de convergence de séries.
2. Exprimer $Y(\omega)$ en fonction de $X(\omega)$ dans les 2 cas proposés. La comparaison suivra.
3.

16 1. (a) Réaliser que... c'est du cours !
   (b) Passer par la v.a. $|X|$... peut-on lui appliquer Markov ?
2. pareil avec $|X|^r$.