ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2025-2026
Mathématiques

Devoir maison n°1
Corrigé

Exercice 1 (Suites et séries)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$**. On considère la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **définie par :** $u_0 = 2$**, et :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$**.**

1. **Étudier la fonction f (variations, valeurs particulières, limites). Tracer un aperçu de la courbe représentative de f.**

   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de telles fonctions (le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$).
   En dérivant : $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{x^2-2}{2x^2}$.
   Des limites usuelles donnent : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+0^+} f(x) = +\infty$; et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

   On obtient le tableau :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$-$	0	$+$	
$2x^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **Montrer :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2}$**. Montrer que (u_n) est monotone ; en déduire que** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$**.**

   On remarque sur ce tableau que : $\forall\, x \geqslant \sqrt{2},\ f(x) \geqslant \sqrt{2}$.
   Procédons alors par récurrence :

   - D'après l'énoncé, $u_0 = 2$ et on a bien $2 \geqslant \sqrt{2}$;
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose $u_n \geqslant \sqrt{2}$; alors d'après notre remarque précédente $f(u_n) \geqslant \sqrt{2}$, ce qui renvient à : $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$ et la propriété est bien héréditaire.
   - On a bien montré : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2}$.

   Pour la monotonie, calculons :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n} - 2u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} - u_n\right) = \frac{2-u_n^2}{2u_n}$$

   Or, pour tout n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$ donc $u_n > 0$ et $u_n^2 \geqslant 2$, et donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: (u_n) est décroissante.

   Comme elle est minorée par $\sqrt{2}$, on en conclut qu'elle converge vers $\ell \geqslant \sqrt{2}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$; en passant à la limite $n \to +\infty$ on obtient $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$ ce qui donne $\ell^2 = 2$, et comme on cherche une limite $\geqslant \sqrt{2}$, on conclut $\ell = \sqrt{2}$.
   On a bien montré : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

On évalue maintenant la vitesse de convergence de (u_n) vers $\sqrt{2}$.

3. **Montrer :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$**. En déduire :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|u_n - \sqrt{2}\right|^2$**.**

C'est du calcul :

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-\sqrt{2}=\frac{u_n^2+2}{2u_n}-\sqrt{2}=\frac{u_n^2+2-2\sqrt{2}u_n}{2u_n}=\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$$

en reconnaissant une identité remarquable.

Comme $u_n \geqslant \sqrt{2}$, on a $2u_n \geqslant 2\sqrt{2} \geqslant 1$ et donc : $\dfrac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n} \leqslant \left(u_n-\sqrt{2}\right)^2$.

Avec ce qui précède :

$$\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}\right|=\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}\leqslant\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2=\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2$$

(toutes les quantités dans les valeurs absolues sont positives).

4. Montrer : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \left|u_n-\sqrt{2}\right|\leqslant 10^{-2^{n-2}}$.

   C'est évidemment une récurrence. Soit $\mathscr{P}(n)$: « $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leqslant 10^{-2^{n-2}}$ ».

   - $\mathscr{P}(1)$ s'écrit : $|u_1-\sqrt{2}|\leqslant 10^{2^{-1}}=10^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
     $u_0=2$ donc $u_1=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{2}{2}\right)=\dfrac{3}{2}=1.5$ et avec $\sqrt{2}\simeq 1.4$ on trouve $|u_1-\sqrt{2}|\simeq 0.1$ donc bien $\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{10}}$: la propriété est vraie au rang 1.

   - Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, on suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie.
     On a alors $0\leqslant\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leqslant 10^{-2^{n-2}}$, donc $\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2\leqslant\left(10^{-2^{n-2}}\right)^2$ (croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$) ; et donc
     $$\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leqslant\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2\leqslant\left(10^{-2^{n-2}}\right)^2=10^{-2^{n-2}\times 2}=10^{-2^{n-1}}$$
     ce qui donne $\mathscr{P}(n+1)$.
   - Par principe de récurrence on a bien $\mathscr{P}(n)$ pour tout $n\geqslant 1$.

5. **Donner une valeur de n telle que $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leqslant 10^{-100}$. *NB : pour ce n, u_n est donc une approximation de $\sqrt{2}$ à une précision de 100 décimales...***

   Pour que $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leqslant 10^{-100}$, il suffit que $10^{-2^{n-2}}\leqslant 10^{-100}$.
   Cette inéquation se résout :

$$\begin{aligned}
10^{-2^{n-2}}\leqslant 10^{-100} &\Leftrightarrow \ln\left(10^{-2^{n-2}}\right)\leqslant\ln\left(10^{-100}\right) && \text{(stricte croissance du ln)}\\
&\Leftrightarrow -2^{n-2}\ln(10)\leqslant -100\ln(10)\\
&\Leftrightarrow -2^{n-2}\leqslant -100 && \text{division par } \ln(10)>0\\
&\Leftrightarrow 2^{n-2}\geqslant 100\\
&\Leftrightarrow (n-2)\ln(2)\geqslant\ln(100)\\
&\Leftrightarrow n\geqslant 2+\frac{\ln(100)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

   Avec $\dfrac{\ln(100)}{\ln(2)}\simeq 6,64$ on obtient que la première valeur de n qui convient est $n=9$.

   NB : si on ne dispose pas de calculatrice on peut chercher à la main le premier entier tel que $2^{n-2}\geqslant 100$. On obtient après quelques multiplications que $2^6=64$ et $2^7=128$, donc on cherche n tel que $n-2\geqslant 7$; et on retrouve $n=9$ comme première valeur qui convient.

6. **Écrire une fonction Python `approx(epsilon)` qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie le premier terme de (u_n) tel que $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \varepsilon$.**

   Le cœur du programme sera une boucle `for` qui calcule successivement les termes de u_n par application de f. La question est de savoir combien de termes calculer. On peut adapter le cadre précédent pour obtenir, pour $\varepsilon \in]0,1[$:

$$10^{-2^{n-2}} \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow n \geqslant 2 + \frac{\ln\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(10)}\right)}{\ln(2)}$$

   (respirez !!) et obtenir un premier programme :

```python
def approx(epsilon):
    u = 2 # u0
    N = 2+np.log(-np.log(epsilon)/np.log(10))/np.log(2)
                    # rang du premier terme qui convient
    for k in range(N):
        u = 1/2*(u+2/u)
    return u
```

   On peut, sinon, tester à chaque tour de boucle si on a atteint la précision requise en utilisant la majoration de la question 4. On s'arrête donc au premier n tel que $10^{-2^{n-2}} < \varepsilon$:

```python
def approx(epsilon):
    u = 2 # u0
    n = 0
    while 10**(-2**(n-2)) >= epsilon
        u = 1/2*(u+2/u)
        n = n+1
    return u
```

Exercice 2 (Probabilités)

1. **On lance n fois une pièce donnant Pile avec une probabilité p et Face avec une probabilité $q = 1 - p$. On suppose $0 < p < 1$.**
   On note B_n l'événement : « Au cours des n premiers lancers, P n'est jamais suivi de F » . Montrer que :

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q-p} & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = q \end{cases}$$

   Au cours des n premiers lancers, P n'est jamais suivi de F ssi la succession de ces lancers est de la forme FF...FPP...PP ; ou FFFFF....F ; ou PPPP...P.
   En appelant P_i et F_i les événements usuels, on recherche :

   - $\mathbb{P}(\mathrm{P}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{P}_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{P}_i) = p^n$ par indépendance des lancers successifs ;
   - $\mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{F}_n) = q^n$ (idem) ;
   - Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{F}_k \cap \mathrm{P}_{k+1} \cap \ldots \cap \mathrm{P}_n) = q^k p^{n-k}$ toujours par indépendance.

   Par disjonction il suffit alors de sommer ces différentes probabilités :

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = p^n + q^n + \sum_{k=1}^{n-1} p^{n-k} q^k = \sum_{k=0}^{n} p^{n-k} q^k = p^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^k$$

   On reconnaît une somme géométrique FINIE, de raison $\frac{q}{p}$. Il faut donc séparer 2 cas :

   - si $\dfrac{q}{p} \neq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = p^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^k &= p^n \frac{1-(\frac{q}{p})^{n+1}}{1-\frac{q}{p}} \\ &= p^{n+1} \frac{1-(\frac{q}{p})^{n+1}}{p-q} \\ \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) &= \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q} \end{aligned}$$

- si $p = q = \dfrac{1}{2}$ (car on a toujours $p + q = 1$) :

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} 1^k = \frac{n+1}{2^n}$$

2. **Première séquence PP.**
On jette indéfiniment une pièce donnant Pile avec une probabilité p et Face avec une probabilité $q = 1-p$. On suppose $0 < p < 1$.
On note X le premier rang d'apparition d'une séquence PP. Par exemple, si on obtient la succession FFFPFFPP, alors $\mathrm{X} = 8$. On pose aussi $\mathrm{X} = 0$ si PP n'apparaît jamais.

(a) **Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.**

- Comme il faut au moins deux lancers pour avoir 2 Pile, $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) = 0$.

- $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 2) = \mathbb{P}(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2) = p^2$ (indép des lancers).

- $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 3) = \mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \mathrm{P}_3) = qp^2$.

- $(\mathrm{X} = 4) = (\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{P}_3 \cap \mathrm{P}_4) \cup (\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{P}_3 \cap \mathrm{P}_4)$; par incompatibilité

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 4) = q^2 p^2 + pqp^2 = qp^2(q+p) = qp^2$$

(b) **En discutant selon le résultat du premier lancer, montrer :**

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = n+2) = q\mathbb{P}(\mathrm{X} = n+1) + pq\mathbb{P}(\mathrm{X} = n)$$

On a $(\mathrm{X} = n+2)$ ssi le premier PP apparaît aux lancers $n+1$ et $n+2$.
Si le premier lancer donne Pile, alors le second lancer doit donner Face (sinon X=2) ; et ensuite on est ramené à la proba d'avoir PP pour la première fois au bout de n lancers.
Si le premier lancer donne Face, on est ramené à la proba d'avoir PP pour la première fois au bout de $n+1$ lancers.

Pour formaliser on fait une FPT sur le SCE $(\mathrm{P}_1, \mathrm{F}_1)$.

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = n+2) = \mathbb{P}((\mathrm{X} = n+2) \cap \mathrm{P}_1) + \mathbb{P}((\mathrm{X} = n+2) \cap \mathrm{F}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{P}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{X} = n+2) + \mathbb{P}(\mathrm{F}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{X} = n+2)$$

D'après ce qui a été dit, $\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{X} = n+2) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = n+1)$; et $\mathbb{P}_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{X} = n+2) = q\mathbb{P}(\mathrm{X} = n)$; et ainsi on obtient :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = n+2) = q\mathbb{P}(\mathrm{X} = n+1) + pq\mathbb{P}(\mathrm{X} = n)$$

(c) **On suppose $p = \dfrac{2}{3}$. Montrer**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

Posons pour alléger les notations $u_n = \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)$.
Pour $p = 2/3$ on trouve la relation de récurrence linéaire : $\forall\, n \geqslant 1, u_{n+2} = \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{2}{9}u_n$.
On obtient l'équation caractéristique $r^2 - \dfrac{1}{3}r - \dfrac{2}{9} = 0$; ses racines sont $r_1 = \dfrac{2}{3}$ et $r_2 = -\dfrac{1}{3}$.
On obtient

$$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \geqslant 1,\ u_n = a\left(\frac{2}{3}\right)^n + b\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

et avec $u_1 = 0$ et $u_2 = \dfrac{4}{9}$ on trouve les valeurs de a et b et on conclut.

(d) **Calculer** $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$, $V(X)$**.**

$n\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{4}{9}\left(n\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - n\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ est le terme d'une série convergente car on a une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées absolument convergentes ($2/3$ et $-1/3$ sont dans $]-1,1[$) donc X admet une espérance.
On trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{4}{9}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{(1-2/3)^2} - \frac{1}{(1+1/3)^2}\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(9 - \frac{9}{16}\right)\\
&= \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

Pour $\mathbb{E}(X^2)$ on invoque le théorème de transfert : cette espérance existe ssi la série de terme général $n^2\mathbb{P}(X = n)$ est absolument convergente (mais elle est à termes $\geqslant 0$ donc la convergence « simple » suffit).
Les séries de terme général $n^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ et $n^2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ convergent bien en écrivant par exemple

$$n^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

et en reconnaissant des séries géométriques dérivées / dérivées secondes (avec les mêmes conditions sur les raisons que précédemment). On somme avec les formules usuelles, et on calcule enfin $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ par Konig-Huygens.