Devoir maison n°1bis
Corrigé

Exercice 1 (Suites et séries)

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. (a) **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$; strictement croissante à partir du rang 2.**

   Par récurrence double :

   - u_0 et u_1 sont entiers naturels ;
   - soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que u_n et u_{n+1} sont dans $\mathbb{N}$. Alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ l'est aussi de manière évidente.
   - Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$.

   On a pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = u_{n-1} \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante ; et avec cette même croissance : pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n+1} - u_n = u_{n-1} \geqslant u_1 > 0$ ce qui donne la stricte croissance à partir du rang 2.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   Plusieurs idées : si $u_n \to \ell$ alors on a aussi $u_{n+1} \to \ell$ et $u_{n+2} \to \ell$; un passage à la limite dans la relation de récurrence donne $\ell = 2\ell$ soit $\ell = 0$.
   Or (u_n) ne peut tendre vers 0 car $u_1 = 1$ e (u_n) est croissante.
   (u_n) est croissante, et ne tend pas vers un réel : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   On peut aussi noter que la *stricte* croissance de la suite *d'entiers* (u_n) donne, à partir du rang 2 : $u_{n+1} \geqslant u_n + 1$ ce qui permet d'établir par récurrence $u_n \geqslant n$. On conclut par minoration.
   On peut enfin déterminer l'expression explicite de (u_n) mais c'est quand même moins esthétique.

Dans toute la suite du problème, a et b (avec $a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$.

2. (a) **Calculer a et b. Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir les encadrements suivants :** $1 < a < 2$; $-1 < b < 0$.

   On trouve $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On vérifie que $a + b = 1$, et $ab = -1$.
   Un peu de *reverse engineering* : on aura $1 < a < 2$ ssi $1 < \sqrt{5} < 3$.
   On a $1 < 5 < 9$, donc $1 < \sqrt{5} < 3$: on obtient le bon encadrement sur a.
   Avec $b = 1 - a$:
   $$1 < a < 2 \Rightarrow -2 < -a < -1 \Rightarrow -1 < \underbrace{1-a}_{=b} < 0$$

   (b) **Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.**

   a et b sont solutions de l'équation caractéristique de la suite (u_n) (suite récurrente linaire d'ordre 2) : on a donc l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha a^n + \beta b^n$$
   Avec les valeurs de u_0 et u_1 on obtient le système
   $$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha a + \beta b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha(a-b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

(c) **En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.**

On a $|a| > 1$ et $|b| = \left|\frac{1}{a}\right| < 1$, ce qui montre que $a^n \to +\infty$ et $b^n \to 0$: on devrait donc avoir $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{\sqrt{5}}$.
Procédons quand même par quotient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_n}{\frac{a^n}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{a^n}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right) = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Or avec ce qui précède $|ab| < 1$ donc $\frac{u_n}{\frac{a^n}{\sqrt{5}}} \to 1$ et on conclut bien

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{\sqrt{5}}$$

3. **Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2^n} = 0$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_n}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^n - \left(\frac{b}{2}\right)^n\right)$$

Les encadrements de a et b trouvés plus haut donnent $\frac{1}{2} < \frac{a}{2} < 1$ et $-\frac{1}{2} < \frac{b}{2} < 0$, donc $\left|\frac{a}{2}\right| < 1$ et $\left|\frac{b}{2}\right| < 1$.
On en déduit bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2^n} = 0$.

4. **Montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.**

Il s'agit de montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k \frac{u_n}{2^n} = 0$. En reprenant le calcul précédent :

$$n^k \frac{u_n}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(n^k\left(\frac{a}{2}\right)^n - n^k\left(\frac{b}{2}\right)^n\right)$$

C'est un cas de croissance comparée un peu détourné. Montrons un petit lemme :

$$\text{Si } 0 < \rho < 1, \text{ et } k \in \mathbb{N}^*, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} n^k\rho^n = 0.$$

En effet, $n^k\rho^n = n^k \exp\left(n\ln(\rho)\right)$; et on a $\ln(\rho) < 0$ et on conclut donc par une croissance comparée usuelle.

Il suffit ensuite d'appliquer ce lemme à $\rho = \frac{a}{2}$ et $\rho = \frac{b}{2}$ (qui vérifient la bonne hypothèse, cf. question précédente) pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} n^k \frac{u_n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(n^k\left(\frac{a}{2}\right)^n - n^k\left(\frac{b}{2}\right)^n\right) = 0$$

5. **Pour $\mathrm{N} \geqslant 1$, on note $\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.**

(a) **Montrer que $\mathrm{S} = \lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{S}_\mathrm{N}$ existe.**

Il s'agit en fait d'examiner la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$. Or d'après la question précédente, on a $n^2\frac{u_n}{2^{n+1}} \to 0$ pour $n \to +\infty$; ce qui montre que $\frac{u_n}{2^{n+1}} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison de SATP, on a le résultat demandé.

(b) **Montrer :** $\forall \mathrm{N} \geqslant 1, \mathrm{S_N} = 4\mathrm{S_{N+2}} - 2\mathrm{S_{N+1}} - 1$.
On pourra utiliser la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

On écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{u_n}{2^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{2^{n+1}} \quad \text{(en utilisant la définition)}\\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{u_{n+2}}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}\\
&= \sum_{k=3}^{\mathrm{N}+2} \frac{u_k}{2^{k-1}} - \sum_{k=2}^{\mathrm{N}+1} \frac{u_k}{2^{k}} \quad \text{avec des changements d'indice } k=n+2 \ / \ k=n+1\\
&= 4\sum_{k=3}^{\mathrm{N}+2} \frac{u_k}{2^{k+1}} - 2\sum_{k=2}^{\mathrm{N}+1} \frac{u_k}{2^{k+1}}\\
&= 4\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}+2} \frac{u_k}{2^{k+1}} - \frac{u_1}{4} - \frac{u_2}{8}\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1} \frac{u_k}{2^{k+1}} - \frac{u_1}{4}\right)\\
&= 4\left(\mathrm{S_{N+2}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) - 2\left(\mathrm{S_{N+1}} - \frac{1}{4}\right)\\
&= 4\mathrm{S_{N+2}} - 1 - \frac{1}{2} - 2\mathrm{S_{N+1}} + \frac{1}{2}\\
\mathrm{S_N} &= 4\mathrm{S_{N+2}} - 2\mathrm{S_{N+1}} - 1
\end{aligned}$$

(c) **Donner la valeur de S.**

Il suffit de passer à la limite $\mathrm{N} \to +\infty$ dans ce qui précède : $\mathrm{S_N}$, $\mathrm{S_{N+1}}$ et $\mathrm{S_{N+2}}$ tendent vers S, et on trouve $\mathrm{S} = 2\mathrm{S} - 1$. Finalement $\mathrm{S} = 1$.

6. **On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - au_n$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = b^n$.**

Calcul direct avec la formule explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \beta_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^{n+1} - b^{n+1} - a(a^n - b^n)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(ab^n - b^{n+1}) = \frac{b^n}{\sqrt{5}}(a-b) = b^n$$

7. **On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.**

(a) **Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.**
Les questions précédentes donnent $au_{2n} = u_{2n+1} - b^{2n}$. Or $0 < b^{2n} < 1$, et u_{2n+1} est entier : l'entier immédiatement inférieur à au_{2n} est $u_{2n+1} - 1$. On a donc $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.

(b) **Exprimer pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\lfloor au_{2n-1} \rfloor$ en fonction de u_{2n}.**
On a cette fois $au_{2n-1} = u_{2n} - b^{2n-1}$, avec $-1 < b^{2n-1} < 0$: donc $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n}$.

Exercice 2 (Probabilités)

On dispose d'une pièce équilibrée, qu'on lance de manière répétée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce donne Face au n-ième lancer, et 0 si elle donne Pile au n-ième lancer.
Soit $p \in [0,1]$ quelconque ; on souhaite, à partir de lancers indépendants de cette pièce, créer une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p.

1. **Proposer une expérience pour $p = \dfrac{1}{4}$; puis pour $p = \dfrac{1}{2^n}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.**

Pour $\frac{1}{4}$ il suffit de lancer 2 fois la pièce : les 4 issues possibles sont équiprobables, de probabilité $\frac{1}{4}$. On peut par exemple définir le succès comme l'obtention de PP.
De même pour $p = \dfrac{1}{2^n}$: le succès est « obtenir n Pile en n lancers » et l'échec est toute autre issue.

2. **On s'intéresse au protocole suivant: « On jette la pièce jusqu'à l'obtention d'un Face. Si le premier Face est obtenu lors d'un lancer pair, on considère qu'il y a succès, sinon il y a échec ».**
On note S_n : « obtenir un succès au n-ième lancer » , et S : « obtenir un succès » . Donner $\mathbb{P}(S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; en déduire que $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{3}$.

L'événement « succès » est donc la réunion des successions de lancers menant à la séquence « PPP...PF » , où il y a $2k-1$ « P » (avec $k \in \mathbb{N}^*$).
Notons P_n (resp. F_n) l'événement « obtenir Pile (resp. Face) au n-ème lancer » .
Clairement on ne peut pas obtenir de succès après un nombre de lancers impair ! Par contre on obtient un succès au rang $2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) ssi le premier Face arrive au rang $2k$. Autrement dit :

$$S_{2k} = P_1 \cap \ldots \cap P_{2k-1} \cap F_{2k}$$

Par indépendance des lancers, $\mathbb{P}(S_{2k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$.

Ensuite, par union disjointe et en reconnaissant une somme géométrique :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} S_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

On considère maintenant un réel p qui s'écrit sous la forme :

$$p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} \qquad \text{où} : \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in \{0,1\}$$

3. **Montrer que la série définissant p est convergente.**

Comme les a_n sont dans $\{0,1\}$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{a_n}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

On a donc majoré par le terme général d'une série convergente ($\left|\frac{1}{2}\right| < 1$), donc par comparaison de SATP, $\sum \frac{a_n}{2^n}$ converge.

4. (a) **On jette la pièce jusqu'à l'obtention d'un Face. On note n le numéro du lancer correspondant à ce premier Face et on pose $Y = a_n$.**
On note A_n l'événement : « on obtient le premier Face au n-ième lancer » . Vérifier que

$$\mathbb{P}_{A_n}(Y = 1) = a_n$$

(on pourra discuter suivant les valeurs de a_n).

a_n vaut 0 ou 1.
Si $a_n = 0$: sachant A_n on obtient le premier Face au n-ième lancer ; Y est alors égal à a_n, donc à 0... donc pas à 1 ! Ainsi $\mathbb{P}_{A_n}(Y = 1) = 0 = a_n$.
Si $a_n = 1$: sachant A_n on obtient le premier Face au n-ième lancer ; Y est alors égal à a_n, donc à 1. Ainsi $\mathbb{P}_{A_n}(Y = 1) = 1 = a_n$.
Dans les deux cas on a bien la réponse attendue.

(b) **En déduire que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.**

Comme l'événement « on obtient indéfiniment des Pile » est de probabilité nulle, on peut écrire[1]

$$(Y = 1) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n \cap (Y = 1))$$

puis

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(Y = 1) \times \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \times \mathbb{P}(A_n)$$

[1] en fait il faudrait détailler un peu : les (A_n) forment un système quasi-complet d'événements ; ce qui suffit à appliquer les probas totales.

La probabilité de A_n est $\mathbb{P}(X = n)$ où $X \hookrightarrow \mathscr{G}(1/2)$; donc $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et on obtient bien

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = p$$

(c) **Que vaut a_n en fonction de n dans le cas de la question 2 ?**

Pour connecter avec ce qui précède, le succès est $Y = 1$. Dans le cas de la question 2, $Y = 1$ ssi le premier Face arrive à un rang pair donc $\mathbb{P}_{A_{2n}}(Y = 1) = 1 = a_{2n}$ et $\mathbb{P}_{A_{2n+1}}(Y = 1) = 0 = a_{2n+1}$.
Ainsi $a_n = 0$ si n est impair, et $a_n = 1$ si n est pair.

5. **Application. Montrer que :**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{3+4n}} + \frac{1}{2^{4+4n}}\right) = \frac{1}{5}$$

En déduire un protocole expérimental renvoyant un « succès » (à définir) de probabilité $\frac{1}{5}$.

On a, par sommes géométriques classiques :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{3+4n}} + \frac{1}{2^{4+4n}}\right) &= \frac{1}{2^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^4}\right)^k + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \\
&= \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} \\
&= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \frac{16}{15} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Par le même raisonnement, la probabilité d'obtenir le 1er Face à un lancer k, où k est de la forme $4k + 4$ (*ie* multiple de 4, en excluant le « lancer numéro zéro ») ou de la forme $4k + 3$ est $\frac{1}{5}$.
L'expérience consiste donc toujours à lancer la pièce jusqu'à obtention du 1er Face ; on considère comme succès l'arrivée du 1er face aux lancers 3,4,7,8,11,12,15,16,19,20,23,24,...
Remarque : on peut en fait montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ existe et est unique pour tout $p \in [0, 1]$: il s'agit du *développement binaire* de p.