

Covariance et corrélation

Exercices

Exercice 1. On considère n clients se répartissant aléatoirement dans 3 hôtels H_1, H_2, H_3 de manière équiprobable. Les choix des clients sont indépendants. On note X_i le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel i .

1. Déterminer les lois de X_1, X_2, X_3 ; leurs espérances et variances.
2. Déterminer loi, espérance et variance de $X_1 + X_2$.
3. Calculer la covariance de X_1, X_2 , puis leur coefficient de corrélation linéaire. Le signe de ce coefficient vous paraît-il raisonnable ?
4. On considère maintenant un problème similaire, avec n clients et p hôtels. Montrer que $\rho(X_1, X_2) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$. Interpréter.

Exercice 2. On considère trois v.a.d A, B, C indépendantes telles que $A \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $B \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, $C \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On pose $X = A + B$ et $Y = B + C$.

1. Rappeler les lois de X et Y .
2. Montrer que X et Y admettent une covariance, et la calculer.
3. En déduire le coefficient de corrélation linéaire de X et Y .

Exercice 3. Soient $n \geq 3$, et $X_1, \dots, X_n$ n v.a.d mutuellement indépendantes suivant $\mathcal{B}(p)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Donner la loi de Y_i . Montrer que si $|i - j| > 1$, Y_i et Y_j sont indépendantes.
2. Pour $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de (Y_i, Y_{i+1}) .

Exercice 4. On considère n joueurs qui tirent à la carabine sur une cible. Chaque joueur dispose de 2 coups, et touche la cible avec une probabilité p .

Les différents joueurs et les différents tirs sont supposés indépendants.

1. On note X_1 le nombre de tireurs qui touchent la cible au premier tir, et X_2 le nombre de tireurs qui touchent au second tir. Donner les lois de $X_1, X_2, X_1 + X_2$.
2. On note A le nombre de tireurs touchant la cible lors de leurs deux essais ; et B le nombre de tireurs touchant la cible sur un seul des deux essais.
Donner les lois de A et B . Montrer que le couple (A, B) admet une covariance.
3. Exprimer $X_1 + X_2$ en fonction de A et B ; en déduire $\text{Cov}(A, B)$. Interpréter son signe.

Indications

- 1**
 1. Lois usuelles
 2. Loi usuelle, encore !
 3. Partir de $V(X_1 + X_2)$.
 4. ...
- 2**
 1. Cours !
 2. $\text{Cov}(A + B, B + C)$ avec A, B, C indép : en développant il ne reste plus grand chose.
 - 3.
- 3**
 1. Y_i est une variable de Bernoulli. Ensuite le lemme des coalition s'applique... des fois.
 2. Pour une fois, aller chercher $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- 4**
 1. Lois usuelles ; stabilité (justifier qu'elle s'applique !!)
 2. Encore des lois usuelles ; avec la bonne « expérience » et le bon « succès » .
 3. Justifier que $X_1 + X_2 = A + 2B$.
Ensuite on a $V(X_1 + X_2)$ facilement ; et $\text{Cov}(A, B)$ sortira du développement de $V(2A + B)$. Les expressions ne sont pas très jolies.
On trouve $\text{Cov}(A, B) = -2np^3q$.