

Espaces vectoriels

L'étude de $\mathbb{R}^n$ entreprise en ECG1 est ici généralisée à d'autres types d'objets qui seront aussi nommés¹ « vecteurs ».

On a désigné $\mathbb{R}^n$ comme un *espace vectoriel* car on peut munir cet ensemble de *lois de composition* : on peut additionner deux éléments de $\mathbb{R}^n$, et on peut multiplier un élément de $\mathbb{R}^n$ par un nombre réel. Ces deux opérations ont de plus des propriétés sympathiques (distributivité, existence d'un vecteur nul,...) qui rendent les calculs naturels.

On va maintenant appeler *espace vectoriel* des ensembles d'objets de nature différente, mais munis de lois de composition analogues.

1 Définitions

1.1 Espaces vectoriels

La définition suivante est assez longue. Elle fournit les règles de calcul nécessaires au bon fonctionnement de la théorie. Il n'est pas nécessaire de la connaître par cœur.

Elle est différente de celle du programme officiel, mais c'est celle qui est donnée dans tout livre de mathématiques. De toute façon de telles subtilités n'ont pas d'importance en vue des concours.

Définition 1. On appelle *espace vectoriel sur $\mathbb{R}$* (ou *$\mathbb{R}$ -espace vectoriel*, ou *$\mathbb{R}$ -ev*), un ensemble E muni de deux opérations notées $+$ (addition de deux vecteurs) et $\cdot$ (multiplication d'un vecteur par un réel), telles que :

1. L'addition est associative :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$$

2. L'addition est commutative :

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$$

3. Il existe un élément neutre pour l'addition (appelé vecteur nul) :

$$\exists 0_E \in E, \forall x \in E, x + 0_E = x$$

4. Tout élément de E admet un symétrique (dans ce cas, appelé opposé de x et noté $-x$) :

$$\forall x \in E, \exists (-x) \in E, x + (-x) = (-x) + x = 0_E$$

5. La multiplication vérifie : $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

- $\alpha \cdot x \in E$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
- $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributivités)
- $1 \cdot x = x$

Les éléments de E sont appelés vecteurs ; les éléments de $\mathbb{R}$ seront, dans ce contexte, appelés scalaires.

¹« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. » (Henri Poincaré, *Science et méthode* (1908))

1.2 Les espaces vectoriels de référence

Cette année nous n'aurons à considérer que les espaces vectoriels suivants :

- $\mathbb{R}^n$ (n -uplets de nombres réels)
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (matrices colonnes à n coefficients réels)
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels).
- et en particulier $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrices carrées d'ordre n).
- $\mathbb{R}_n[x]$: les polynômes (ou : fonctions polynômiales) de degré au plus n . Ce sont les fonctions de la forme $x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Les règles de calcul bien connues assurent que ce sont bien des espaces vectoriels au sens de la définition précédente.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 2. Soit E un espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel (abrégé en : sev) de E si elle est non vide et stable par combinaison linéaire : toute combinaison linéaire de vecteurs de F est encore un vecteur de F .

Pour vérifier qu'on a un sous-espace vectoriel, on utilise le résultat suivant :

Théorème 1. Soit E un espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ssi :

1. $F \subset E$
2. $F \neq \emptyset$
3. $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + y \in F$ (stabilité par combinaison linéaire).

De manière générale, c'est cette propriété qui nous permettra (dans le cadre du programme d'ECG) de montrer qu'un ensemble donné est un espace vectoriel :

Méthode :

Pour montrer qu'un ensemble donné est un espace vectoriel, on vérifiera qu'il s'agit d'un sev d'un des espaces de référence donnés dans la partie précédente.

On note que² tout sous-espace vectoriel contient le vecteur nul 0_E : ainsi,

Pour montrer qu'un sev F est non vide, on cherchera le plus souvent à montrer que $0_E \in F$.

Par contraposée, une partie de E ne contenant pas le vecteur nul ne peut pas être un sous-espace vectoriel ; ceci peut servir à justifier qu'une partie donnée n'est pas un sous-espace vectoriel. Par exemple, les ensembles suivants ne sont pas des sev :

- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$
- Les polynômes $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tels que $P(0) = 1$.

²car s'il existe un vecteur $x \in F$, alors, avec $\lambda = -1$ et $y = x$, la propriété de stabilité donne $(-1)x + x = 0_E \in F$.

Exemple 1.

- $\{0_E\}$, E sont des sev de E (on dit que ce sont des sev triviaux).
- Voir exercices pour des formes classiques de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Les ensembles suivants ne sont pas des sev :
 - L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont toutes les composantes sont positives.
 - L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles.

Sev ou pas ??

On a parfois dans des exercices à déterminer si un ensemble est, ou non, un sous-espace vectoriel. Se pose alors la question suivante : va-t-on chercher à démontrer que c'en est un ? ou que ce n'en est pas un ? Voici quelques « indices » pour déterminer la bonne propriété.

Les arguments qui suivent ne constituent pas une preuve ; ils permettent juste de savoir ce qu'on veut montrer.

Ne sont probablement pas des sev :

- les ensembles définis par une inégalité : par exemple

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$$

Pour le démontrer on peut donner un vecteur u tel que $u \in A$, $-u \notin A$. Ici, $u = (1, 0) \in A$ car $1 + 0 \geq 0$; mais $-u = (-1, 0) \notin A$ car $-1 + 0 < 0$. Donc A n'est pas un sev.

- les ensembles définis par une contrainte non linéaire, c'est-à-dire faisant apparaître autre chose que des sommes et des multiplications par des scalaires. Par exemple

$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \quad B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - x^4z = 1\}$$

Dans ce cas, on peut montrer que ce n'est pas un sev en cherchant deux vecteurs tels que $u \in B$, $v \in B$, $u + v \notin B$. Quelques essais avec des vecteurs et des scalaires « simples » (composantes égales à 0, 1, -1) permettent normalement de s'en sortir.

- les ensembles dont les contraintes font apparaître des constantes non nulles : par exemple

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\} \quad C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 1 \right\}$$

Dans ce cas un moyen qui fonctionne est de remarquer que le vecteur nul (ici $(0, 0)$ ou la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) n'appartient pas à l'espace en question. On note que les deux méthodes précédentes permettent ici aussi de s'en sortir, mais c'est un peu plus long...

Si votre espace ne rentre pas dans ces catégories, il est fort probable que c'est un sev : mais il faut maintenant le démontrer en vérifiant les propriétés du théorème 1 !

On voit dans ce qui précède un principe général pour montrer qu'une propriété (ici, la stabilité par combinaison linéaire) est fausse :

Méthode : recherche d'un contre-exemple

Pour montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel, on donne un exemple de vecteurs pour lesquels les propriétés recherchées sont fausses.

...et on évite donc de présenter un calcul de stabilité qui n'aboutit pas en disant « ça fonctionne pas donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel » ...

1.4 Quelques précisions sur les polynômes

1.4.1 Définitions et vocabulaire

On rappelle que les polynômes (ou : fonctions polynômiales) sont les fonctions de la forme

$$P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Dans cette expression :

- Les nombres réels a_i sont appelés les *coefficients* de P ;
- Si P est une fonction polynômiale non nulle, on peut l'écrire comme

$$P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d$$

avec $a_d \neq 0$. L'entier naturel d est alors la plus grande puissance de x apparaissant dans l'expression de $P(x)$.

d est alors appelé le *degré* de P , et noté $\deg(P)$; a_d (qui est donc non nul par définition du degré) est appelé *coefficient dominant* de P .

On convient que le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$.

Exemple 2. Les fonctions suivantes :

- $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 2$
- $Q : x \mapsto x - 7x^4$
- $R : x \mapsto 3$

sont des polynômes.

Exercice 1. Donner les degrés et coefficients dominants de P , Q , et R .

Avec les opérations usuelles sur $\mathbb{R}_n[x]$, on observe que :

- Si P et Q sont des polynômes de degré $\leq n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P + Q$ et λP sont aussi des polynômes de degré $\leq n$.
NB : ceci montre que $\mathbb{R}_n[x]$ est bien un espace vectoriel.
- Attention, l'ensemble des polynômes de degré égal à n ne forme pas un sous-espace vectoriel !
Par exemple, $f : x \mapsto 3x$ et $g : x \mapsto 2 - 3x$ sont de degré 1, mais leur somme est de degré 0.
- Si P est un polynôme de degré p et Q un polynôme de degré q , alors $\deg(PQ) = p + q$.
NB : $\mathbb{R}_n[x]$ n'est donc pas stable par produit : $f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto 3x^2$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$, mais leur produit vérifie $(fg)(x) = f(x)g(x) = 3x^5$ et n'est donc pas dans $\mathbb{R}_3[x]$.

Notations

Il existe principalement deux notations usuelles pour manipuler les polynômes (voir EDHEC 2017 et EML 2017 pour un exemple de chacune). On commence par introduire les fonctions $x \mapsto x^k$ ($k \in \mathbb{N}$) appelées *monômes*. Ces fonctions monôme seront notées e_k ou X^k .

On voit alors que tout polynôme est une combinaison linéaire de monômes. Par exemple, le polynôme

$$P : x \mapsto 3x^2 - 2x + 6$$

s'écrira, selon la convention choisie :

$$P = 3e_2 - 2e_1 + 6e_0 \quad \text{ou} \quad P = 3X^2 - 2X + 6$$

Dans toute la suite de ce cours on adoptera la seconde notation, avec les X , et on traduira de temps en temps dans les autres formalismes. Pour l'instant on manque de recul sur la notation qu'adopteront les sujets de concours ; dans tous les cas la tolérance sera de mise.

On notera aussi indifféremment $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$.

1.4.2 Dérivation

On a souvent à dériver des fonctions polynômiales.

On sait que la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto kx^{k-1}$; si on note D la fonction qui associe à une fonction sa dérivée, ce résultat donne :

$$D(X^k) = kX^{k-1}$$

Dans l'autre système de notations, on obtient que

$$\forall k \in \mathbb{N}, D(e_k) = ke_{k-1}$$

et par linéarité de la dérivation, on en déduit la dérivée de n'importe quel polynôme. Par exemple, avec les deux formalismes évoqués plus haut :

$$D(X^4 - 2X^3 + 1) =$$

$$D(e_5 - 2e_2) =$$

1.4.3 Identification des coefficients

Proposition 2. *Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.*

1.4.4 Racines

Définition 3. *Soit P un polynôme ; on dit qu'un nombre a est une racine de P ssi $P(a) = 0$.*

Exemple 3. 1 est racine du polynôme $3X^2 - X - 2$.

En considérant les racines d'un polynôme, on obtient des propriétés importantes :

Proposition 3.

- *Factorisation : si P est un polynôme tel que $P(a) = 0$, alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X - a) \times Q$. Avec l'exemple précédent, on trouve : $3X^2 - X - 2 = (X - 1)(3X + 2)$.*
- *Racines d'un polynôme : si un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ possède un nombre de racines strictement supérieur à n , alors P est le polynôme nul. On en déduit notamment que si P est un polynôme ayant une infinité de racines, alors P est le polynôme nul.*

2 Familles génératrices, familles libres, bases

On rappelle plusieurs définitions vues en première année :

Définition 4. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E . On appelle espace engendré par la famille $(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des x_i . On note cet ensemble $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$:

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

L'ensemble ainsi obtenu est un sous-espace vectoriel :

Théorème 4. Pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E , $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Méthode :

Il sera très courant de montrer que des ensembles sont des sous-espaces vectoriels en les écrivant comme des espaces engendrés.

Exemple 4. Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} a+2b & 3a \\ 2a-b & a+b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Définition 5. Soit E un espace vectoriel, et F un sev de E .

On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de F est **génératrice** de F (ou engendre F) si tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des x_i ; ce qui équivaut à : $F \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Ou avec des quantificateurs : $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de F ssi :

$$\forall u \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Remarque 1. Parler de « famille génératrice » sans préciser quel sev la famille engendre n'a donc pas de sens : une famille est toujours génératrice de l'espace qu'elle engendre (!).

Il arrive néanmoins qu'on parle de famille génératrice sans précision supplémentaire : il faut alors comprendre qu'elle est génératrice de l'espace vectoriel tout entier.

Exemple 5.

1. $\{(1, 0), (0, 1)\}$ et $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ sont des familles génératrices de $\mathbb{R}^2$.
2. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ et $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ sont des familles génératrices de $\mathbb{R}^3$.
3. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (M_1, M_2) est une famille génératrice du sev des matrices 2×2 dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.

4. $(1, X, X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$; elle est aussi génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$.

On remarque dans la seconde famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ vue ci-dessus qu'il suffit en fait de deux des trois vecteurs pour générer $\mathbb{R}^2$ entier. Ceci est dû au fait que, par exemple, $(1, 1)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(0, 1)$. En un sens, ce n'est pas une famille génératrice « optimale » : le troisième vecteur n'apporte rien de plus que les deux premiers.

Une famille dans laquelle un des vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres est appelée *famille liée* ; une famille non liée est appelée *famille libre*.

La caractérisation la plus pratique d'une famille libre est la suivante :

Définition 6. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est dite **libre** si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle des x_i est celle où tous les coefficients sont nuls.

Autrement dit, $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ssi :

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Le schéma d'une démonstration de liberté est basé sur cette définition :

Méthode :

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on considère des nombres réels λ_i tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$; et on montre que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$.

Remarque 2.

- On peut vérifier que cette définition assure qu'une famille est libre si et seulement si aucun des vecteurs x_i n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille. Mais cette dernière propriété n'est pas très pratique à manipuler...
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- Une famille (u, v) de deux vecteurs est liée ssi $u = 0_E$, ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$. On dit alors que u et v sont *colinéaires* ; en pratique cela revient à dire qu'ils sont « proportionnels ». Par exemple $u = (1, 2, -1)$ et $v = (-2, -4, 2)$ vérifient $v = -2u$ donc sont colinéaires ; $u' = (1, 2, 3)$ et $v' = (0, 2, 1)$ ne sont pas colinéaires.
- Une famille de deux vecteurs est libre ssi ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Ce critère sera utilisé très souvent ; mais attention, il N'EST PAS VALIDE pour des familles de 3 vecteurs ou plus !!!
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $(x_1, \dots, x_p)$ est également libre (autrement dit, toute sous-famille d'une famille libre est libre).
- Attention, une réunion de familles libre n'est pas libre. Par exemple, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ et $\{(1, 1), (1, -1)\}$ sont deux familles libres, mais $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1)\}$ n'est pas libre (pourquoi ?).

Dans le cas d'une famille liée, toute combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$ avec les λ_i non tous nuls³ est appelée *relation de liaison* entre les x_i .

On peut maintenant définir une base d'un espace vectoriel :

Définition 7. Soit E un espace vectoriel. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est appelée *base* de E si et seulement si c'est une famille libre, et génératrice de E .

Remarque 3. Un espace vectoriel (au sens de la définition 1) n'admet pas forcément de base. Ce sera néanmoins le cas dans le cadre du programme d'ECG.

³et pas forcément « tous non nuls » : nuance !

[illegible]

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , elle est en particulier génératrice ; et donc tout $x \in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. La propriété de liberté implique que les coefficients correspondants sont uniques. On les appelle *coordonnées* de x dans $\mathcal{B}$:

Définition 8. Soit E un espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout x de E , il existe des uniques coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Les λ_i sont appelés **coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$** .

Démonstration. L'existence de tels coefficients résulte du fait que la famille est génératrice. Montrons leur unicité, en supposant qu'il existe deux décompositions

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$$

En faisant la différence, on obtient $0_E = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) e_i$; par liberté on a donc $\lambda_i - \mu_i = 0$ pour tout i , donc $\lambda_i = \mu_i$, ce qui montre bien l'unicité. □

Remarque 4. On a ici le schéma typique d'une démonstration d'unicité : pour montrer qu'il n'existe qu'un seul objet vérifiant telle propriété, on suppose qu'il en existe deux, et on montre qu'ils sont en fait identiques. Ceci est à retenir.

Il sera très pratique d'introduire la *colonne des coordonnées* d'un vecteur :

Définition 9. Soit E un espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$; soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ un vecteur de E , décomposé dans la base $\mathcal{B}$.
On appelle *vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$* la *matrice colonne* :

$$X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Attention : il est essentiel de noter que les coordonnées de x dépendent de la base $\mathcal{B}$ considérée : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases distinctes, on aura en général $X_{\mathcal{B}} \neq X_{\mathcal{B}'}$. Nous verrons dans le chapitre suivant comment relier ces deux colonnes.

Exemple 7. Donner la colonne des coordonnées du vecteur $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$:

- dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$;
- dans la base $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

Remarque 5. On se convainc avec ce dernier exemple que :

Les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique sont ses composantes.

et on se rappellera bien que, dans toute autre base, les composantes ne sont pas les coordonnées.

3 Espaces vectoriels de dimension finie

On vit dans un espace à 3 dimensions⁴ : qu'est-ce que ça signifie ?

Nous allons définir la dimension d'un espace vectoriel (enfin de certains espaces vectoriels... d'autres n'admettent pas de dimension, mais le programme exclut leur étude).

Essentiellement un espace vectoriel est de dimension finie si on peut l'engendrer par une famille finie de vecteurs ; et la dimension sera alors le nombre de vecteurs *indépendants* nécessaire pour engendrer notre espace.

3.1 Théorie usuelle de la dimension

On commence par une première définition de la notion de dimension. Ce n'est pas la plus pratique et on ne l'appliquera quasiment jamais ; mais cela permet d'amorcer une construction propre.

Définition 10. On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie.

Soit E un espace de dimension finie. D'après la définition précédente, E admet des familles génératrices finies. On peut alors se demander s'il est possible de trouver une base de E . La réponse est positive mais nécessite un peu de boulot.

3.2 Existence et construction de bases

Les démonstrations de ce chapitre ne sont pas à connaître et sont toutes renvoyées en annexe ; il est par contre bon de mémoriser certains résultats et techniques qui peuvent revenir dans d'autres contextes et aider à l'intuition.

On commence par un lemme⁵ qui traite d'opérations possibles sur des familles génératrices ou libres permettant de conserver leurs propriétés. Avec une certaine habitude, les résultats suivants devraient apparaître intuitifs.

Lemme 5 (Opérations sur les familles).

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E . Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé.

- **S'il existe un vecteur x_k s'exprimant comme une combinaison linéaire des autres vecteurs $(x_i)_{i \neq k}$, on peut le retirer à la famille sans changer l'espace engendré :**

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Par exemple, $\text{Vect}(x_1, x_2, x_1 + x_2) = \text{Vect}(x_1, x_2)$.

- **Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, et si on lui ajoute un vecteur u qui n'est pas combinaison linéaire des x_i , alors la famille obtenue $(u, x_1, \dots, x_n)$ est encore libre.**

Les constructions de cette partie reposent sur le théorème suivant (démonstration, qui n'est pas à connaître, en annexe) :

Théorème 6. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille génératrice finie de E et soit $(u_1, \dots, u_q)$ une famille libre de E . Alors $q \leq p$.

Ainsi, le cardinal de toute famille génératrice est supérieur au cardinal de toute famille libre.

⁴en fait : 4 dimensions si on compte le temps ; 10, 11 ou 26 dimensions si on fait de la théorie des cordes. Mais restons sur 3.

⁵En mathématiques, on nomme « lemme » un résultat intermédiaire assez pratique dans le cours d'une démonstration, mais qui n'a pas l'importance d'un théorème.

Ce résultat va nous permettre d'introduire la dimension d'un espace vectoriel. Les propositions suivantes relient les propriétés de familles de vecteurs à leurs cardinaux.

Proposition 7. Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie ; on note n le cardinal minimal d'une famille génératrice (on verra en-dessous que $n = \dim(E)$).

1. Toute famille génératrice de cardinal n est une base de E (et donc E admet une base).
2. Toutes les bases de E ont pour cardinal n . On note alors $n = \dim(E)$.
3. Toute famille de cardinal strictement supérieur à $\dim(E)$ est liée.
4. Toute famille de cardinal strictement inférieur à $\dim(E)$ n'est pas génératrice.
5. Toute famille libre de cardinal $\dim(E)$ est une base de E .
6. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de $n = \dim(E)$ vecteurs de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.
 - (b) $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice.
 - (c) $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
7. S'il existe une famille libre de p vecteurs de E , on a $\dim(E) \geq p$.

On peut interpréter ces résultats en disant qu'une famille génératrice de taille minimale est une base de E ; et qu'une famille libre de taille maximale est une base de E .

Le cinquième point est d'usage très fréquent pour montrer qu'on a affaire à une base :

Méthode :

Soit E un espace de dimension n , et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de cardinal n de vecteurs de E .
Pour montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E , il suffit de montrer que c'est une famille libre.

Attention :

Dans la méthode précédente il faut raisonner correctement.

Le résultat est :

« si une famille de cardinal égal à la dimension de E est libre, alors elle est aussi génératrice, et c'est donc une base de E »

et non :

« une famille de cardinal égal à la dimension de E est automatiquement génératrice ; si de plus elle est libre, c'est donc une base de E »

ce dernier raisonnement étant FAUX.

Remarque 6. Soit E un espace de dimension n . Pour montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E , il suffit aussi de montrer que c'est une famille génératrice ; mais sauf cas particuliers cette méthode est beaucoup moins pratique que la précédente.

Remarque 7. Examiner la terminologie : *dimension* d'un espace, *cardinal* d'une famille. Pour appliquer ce critère, il faut donc que le cardinal de la famille soit égal à la dimension de l'espace.

Remarque 8. Bien sûr, ceci ne fonctionne que si on connaît à l'avance la dimension de l'espace... ce qui n'est pas toujours le cas !

On a introduit au passage la définition usuelle de la dimension d'un espace vectoriel :

Définition 11. Un espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il admet une base $(e_1, \dots, e_n)$ ayant un nombre fini de vecteurs. Toutes les bases de E sont alors de même cardinal n ; ce cardinal est appelé dimension de E .

Remarque 9. Par convention, on pose que l'espace $\{0_E\}$ est de dimension nulle.

3.3 La définition du programme

La définition au programme d'ECG2 est la suivante.

Définition 12. On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) s'il existe une application linéaire φ bijective de E dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 10. Cet entier n est alors unique : en effet si $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^m)$ sont deux bijections linéaires, alors $\psi \circ \varphi^{-1}$ est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^m$.

Le théorème du rang sur cette dernière application donne $m = n$.

On voit alors que les espaces usuels sont de dimension finie :

- $\mathbb{R}^n$ est évidemment de dimension n (prendre φ l'application identité).
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est de dimension mn (considérer $\varphi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ définie par :

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \right) = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,n})$$

- $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ (prendre $\varphi : a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_n)$).

Cette définition est peut-être simple mais occulte le rôle essentiel des bases d'un espace vectoriel dans la notion de dimension ; notamment le fait qu'un même espace vectoriel admet plusieurs bases.

De toute façon adopter l'une ou l'autre définition n'a aucune incidence car elle sont équivalentes, et vous n'aurez pas à rentrer dans ces considérations le jour du concours.

3.4 Les deux définitions coïncident !

On va finir en montrant les deux définitions de la dimension proposées dans ce cours (définitions 11 et 12) sont cohérentes.

Théorème 8. Soit E un espace vectoriel. Il existe une bijection linéaire φ de E sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si E admet une base de cardinal n .

Démonstration. Annexe. □

Remarque 11. En fait, la signification de cette application φ est d'associer à un vecteur le n -uplet de ses coordonnées dans une certaine base ; mais la seule donnée de φ rend l'identification de ladite base assez difficile et peu naturelle.

3.5 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sev de E . Alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
De plus, si F est un sev de E tel que $\dim(F) = \dim(E)$, alors $E = F$.

Démonstration. En annexe. □

Le dernier point est important et sert régulièrement dans des exercices :

Méthode :

Si F et G sont deux (sous-)espaces vectoriels, on peut montrer qu'ils sont égaux en montrant une inclusion et l'égalité des dimensions : on a

$$F = G \text{ si et seulement si } \begin{cases} F \subset G \\ \text{et} \\ \dim(F) = \dim(G) \end{cases}$$

3.6 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 13. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -ev E . On appelle rang de $\mathcal{F}$ la dimension de l'espace engendré par cette famille :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p))$$

Remarque 12. On note $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

- Le rang d'une famille de vecteurs est en quelque sorte le « nombre de vecteurs indépendants » dans cette famille. Par exemple, si tous les x_i sont colinéaires, la famille des x_i est de rang 1.
- $(x_1, \dots, x_p)$ est évidemment une famille génératrice finie de V ; ce dernier espace est donc de dimension finie inférieure ou égale à p . Autrement dit,

$$\text{Pour tous vecteurs } x_1, \dots, x_p, \text{ rg}(x_1, \dots, x_p) \leq p$$

- Si le rang de $(x_1, \dots, x_p)$ est égal à p , $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice de V à $\dim(V)$ vecteurs, donc une base de V ; elle est donc libre.
Réciproquement, si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, c'est une famille génératrice et libre de V , donc une base de V ; donc $\dim(V) = p$. On a ainsi démontré :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_p) \text{ est libre.}$$

3.7 Rang d'une matrice

Si M est une matrice à n lignes et p colonnes, alors on peut considérer la famille de ses colonnes, qui sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Le rang de la matrice est alors définie comme le rang de la famille de ses colonnes :

Définition 14. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle rang de M le rang de la famille de ses colonnes, vues comme éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, elle a p colonnes ; on a alors $\text{rg}(M) \leq p$. De plus, l'espace engendré par les colonnes de M est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace de dimension n ; on en déduit que $\text{rg}(M) \leq n$.

Finalement : si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $\text{rg}(M) \leq \min(n, p)$.

Mentionnons un dernier résultat que nous ne démontrerons pas, mais qui est à connaître :

Théorème 10. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^t M)$.

4 Démonstrations

Théorème 4

Pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E , $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Notons $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

En prenant tous les λ_i nuls, on voit que $0_E \in V$, qui est donc non vide.

Soient maintenant $(u, v) \in V^2$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe alors des coefficients λ_i et μ_i tels que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$$

Alors $\alpha u + v = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i + \mu_i) x_i$ s'écrit aussi comme une combinaison linéaire des x_i , ce qui montre que V est un sev de E . □

Lemme 5

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E . Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé.

- **Si on additionne à x_k une combinaison linéaire des autres x_i , cela ne change pas le sous-espace vectoriel engendré.**

Plus précisément, si $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}\left(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i, x_{k+1}, \dots, x_n\right).$$

- **S'il existe un vecteur x_k s'exprimant comme une combinaison linéaire des $(x_i)_{i \neq k}$, on peut le retirer à la famille sans changer l'espace engendré :**

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

- **Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, et si on lui ajoute un vecteur u qui n'est pas combinaison linéaire des x_i , alors la famille obtenue $(u, x_1, \dots, x_n)$ est encore libre.**

Démonstration.

- Montrons le premier point par double inclusion. On note $u = x_k + \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$. Si $y \in \text{Vect}(x_1, \dots, u, \dots, x_n)$ alors y est une combinaison linéaire des x_i car u l'est aussi. Réciproquement, si $y \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ alors on écrit

$$y = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \sum_{i \neq k} \mu_i x_i + \mu_k x_k = \sum_{i \neq k} \mu_i x_i + \mu_k \left(u - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i \right) = \mu_k u + \sum_{i \neq k} (\mu_i - \mu_k \lambda_i) x_i$$

et on a bien $y \in \text{Vect}(x_1, \dots, u, \dots, x_n)$.

- C'est le premier point en choisissant les λ_i tels que $x_k + \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i = 0$.
- Soit $u \in E \setminus \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Supposons que $\lambda u + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. Si $\lambda \neq 0$, alors

$$u = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,$$

qui est donc combinaison linéaire des $(x_1, \dots, x_n)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\lambda = 0$ et il reste $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. Donc $\lambda_i = 0$ pour tout i et $(u, x_1, \dots, x_n)$ est libre. □

Théorème 6

**Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille génératrice finie de E et soit $(u_1, \dots, u_q)$ une famille libre de E . Alors $q \leq p$.
Ainsi, le cardinal de toute famille génératrice est supérieur au cardinal de toute famille libre.**

Démonstration. Supposons par l'absurde que $q > p$. L'idée de la preuve consiste à remplacer, les uns après les autres, les générateurs $(x_1, \dots, x_p)$ de E par les vecteurs $(u_1, \dots, u_q)$.

Étape 1. Écrivons $u_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ (possible car la famille (x_i) est génératrice) avec au moins l'un des λ_i non nul (car $u_1 \neq 0$). Quitte à renuméroter les x_i on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Par le lemme 5, on peut alors remplacer le générateur x_1 par u_1 . On obtient alors $(u_1, x_2, \dots, x_p)$ comme famille génératrice de E .

Étape 2. Écrivons $u_2 = \mu_1 u_1 + \sum_{i=2}^p \mu_i x_i$. Au moins un des coefficients μ_i pour $i \geq 2$ est non nul car u_2 n'est pas colinéaire à u_1 . Quitte à renuméroter $x_2, \dots, x_n$, on peut supposer $\mu_2 \neq 0$ et remplacer x_2 par u_2 . Ainsi, $(u_1, u_2, x_3, \dots, x_p)$ est une famille génératrice.

Étape 3. En itérant le procédé, après p étapes, on obtient que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice. En particulier, on obtient que le vecteur u_{p+1} (possible car $q > p$) est combinaison linéaire des $u_1, \dots, u_p$, ce qui montre que $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ est liée. Or c'est une sous-famille de la famille libre $(u_1, \dots, u_q)$, donc elle devrait être libre. On obtient une contradiction.

On peut donc conclure que $q \leq p$. □

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev; on note n le cardinal minimal d'une famille génératrice (on verra en-dessous que $n = \dim(E)$).

- 1. Toute famille génératrice de cardinal n est une base de E (E admet donc une base).**
- 2. Toutes les bases de E ont pour cardinal n . On note alors $n = \dim(E)$.**
- 3. Toute famille de cardinal strictement supérieur à $\dim(E)$ est liée.**
- 4. Toute famille de cardinal strictement inférieur à $\dim(E)$ n'est pas génératrice.**
- 5. Toute famille libre de cardinal $\dim(E)$ est une base de E .**
- 6. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de $n = \dim(E)$ vecteurs de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :**
 - (a) $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.**
 - (b) $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice.**
 - (c) $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .**
- 7. S'il existe une famille libre de p vecteurs de E , on a $\dim(E) \geq p$.**

Démonstration. 1. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une telle famille; il faut montrer qu'elle est libre. Si ce n'est pas le cas, un des x_k s'écrit comme combinaison linéaire des autres x_i , et par le lemme 5, $(x_i)_{i \neq k}$ est génératrice, de cardinal $n - 1$, ce qui contredit la minimalité. Elle est donc libre : c'est une base.

2. Soit $\mathcal{B}$ de cardinal p et $\mathcal{B}'$ de cardinal q deux bases de E . Par le théorème 6 : $\mathcal{B}$ est génératrice, $\mathcal{B}'$ est libre, donc $p \geq q$; $\mathcal{B}'$ est génératrice, $\mathcal{B}$ est libre, donc $p \leq q$. Donc $p = q$. D'après le point précédent, il existe une base de cardinal n ; donc toutes les bases sont de cardinal n .
3. Il existe une famille génératrice de cardinal $\dim(E)$: par le théorème 6, une famille de cardinal $> \dim(E)$ ne peut pas être libre.
4. Par définition, $\dim(E) = n$ est le cardinal minimal d'une famille génératrice.
5. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une telle famille; il faut montrer qu'elle est génératrice. Si ce n'est pas le cas, il existe $u \notin \text{Vect}(x_i)$: d'après le lemme 5, $(u, x_1, \dots, x_n)$ est libre de cardinal $\dim(E) + 1$, ce qui est absurde par le troisième point de la proposition.

6. $(c) \Rightarrow (a)$ et $(c) \Rightarrow (b)$ sont évidents; $(a) \Rightarrow (c)$ résulte du cinquième point, et $(b) \Rightarrow (c)$ du premier point.
7. Si n est la dimension de E , il existe une famille génératrice de E à n vecteurs. Le théorème 6 donne alors $p \leq n$.

□

Théorème 8

Soit E un espace vectoriel. Il existe une bijection linéaire de E sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si E admet une base de cardinal n .

Démonstration. 1. Montrons d'abord le sens direct :

Soit E un espace vectoriel, tel qu'il existe une bijection linéaire de E sur $\mathbb{R}^n$. Alors E admet une base de cardinal n .

Soit φ la bijection de E sur $\mathbb{R}^n$ dont on a supposé l'existence.

φ est bijective donc surjective. Soit $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$; il existe donc des x_i tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(x_i) = e_i$. Montrons que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E .

- Génératrice : Soit $x \in E$. On note $\varphi(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; alors

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$$

et donc par injectivité de φ on conclut

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

ce qui montre bien que la famille (x_i) génère E .

- Libre : soient $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i x_i = 0_E$. En appliquant φ :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi(x_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i = (\mu_1, \dots, \mu_n)$$

Mais par linéarité, $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) = \varphi(0_E) = (0, \dots, 0)$; on obtient donc que tous les μ_i sont nuls ; d'où la liberté.

$(x_1, \dots, x_n)$ est donc une base de E .

2. On montre maintenant le sens réciproque :

Soit E un espace vectoriel qui admet une base $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Alors il existe une bijection linéaire de E sur $\mathbb{R}^n$.

Tout vecteur de E s'écrit de manière unique :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

On vérifie alors que l'application $\varphi : \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une bijection linéaire de E sur $\mathbb{R}^n$.

□

Théorème 9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sev de E . Alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

De plus, si F est un sev de E tel que $\dim(F) = \dim(E)$, alors $E = F$.

Démonstration. Notons $n = \dim(E)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $\mathcal{B}$ est une famille génératrice finie de E , qui est donc de dimension finie $\leq n$. $\mathcal{B}$ étant génératrice de E à n éléments, on en déduit que $\dim(E) \leq n$.

Si $\dim(E) = n$, alors $\mathcal{B}$ est génératrice de E à $n = \dim(E)$ éléments, donc est une base de E . On a alors $E = F = \text{Vect}(\mathcal{B})$. $\square$