

Devoir surveillé n°2

18/10/2025

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **mettre en évidence** les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

S'il existe au moins un exercice dans lequel aucune question d'informatique n'est traitée sérieusement, un malus de 1 pt sera appliqué à la note finale.

Exercice 1 (Probabilités)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « Pile » soit égale à p , avec $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$.

Soit N un entier naturel non nul fixé.

On effectue N lancers indépendants du dé ; si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de « Pile » obtenus aux lancers de la pièce,
- Y indique le nombre de « Face » obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z , son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(Z=n)}(X = k)$. On distinguera les cas : $k \leq n$ et $k > n$.
3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

- si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors $\mathbb{P}((X = k) \cap (Z = n)) = \binom{n}{k} \binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$
- si $n > N$ ou $k > n$ alors $\mathbb{P}((X = k) \cap (Z = n)) = 0$.

4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $\left(N, \frac{p}{6}\right)$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
Déterminer la loi du couple (X, Y) .

8. En comparant les variances de Z et de X+Y, montrer que $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{Np(1-p)}{36}$; puis que $\text{Cov}(X, Z) = \frac{5Np}{36}$.

9. *Simulation informatique.*

(a) Écrire les lignes permettant d'importer sous leurs alias usuels :

- le package numpy de calcul numérique ;
- le package numpy.random de modélisation de l'aléatoire ;
- le package matplotlib.pyplot de tracés graphiques.

On supposera ces imports effectués dans tout le reste du sujet.

(b) Programmer une fonction XYZ(N,p) qui modélise cette expérience et renvoie un triplet (X,Y,Z) correspondant aux valeurs de ces trois variables.

(c) Cette fonction étant supposée programmée, on écrit ensuite les commandes :

```
tirages=[XYZ(100,0.4) for k in range(100)]
X = [t[0] for t in tirages]
Z = [t[2] for t in tirages]
plt.scatter(Z,X)
plt.plot([0,max(Z)], [0,max(Z)]) # trace la droite d'équation y=x
plt.show()
```

L'ordinateur renvoie un des graphiques suivants : lequel ? Justifier votre réponse.

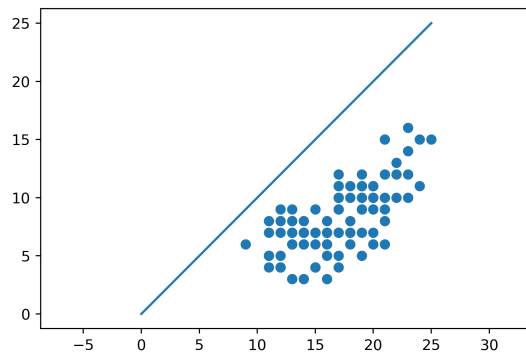


Figure 1

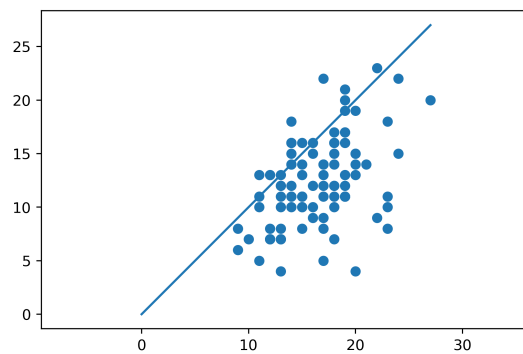


Figure 2

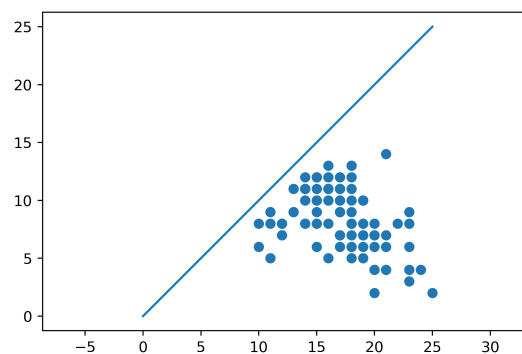


Figure 3

Exercice 2 (Probabilités)

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = q^k p = (1 - p)^k p.$$

PARTIE A :

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
3. À l'aide de ce qui précède, programmer, **sans utiliser `rd.geometric`**, une fonction Python `simule_X(p)` qui, prenant en entrée le réel p , renvoie une simulation de la variable aléatoire X .

PARTIE B :

On modélise l'évolution d'une population de la manière suivante. Si à un instant donné la population est composée de k individus, alors :

- si k est égal à zéro, alors la population est éteinte ;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, on définit k variables aléatoires $X_1, \dots, X_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A.
Chaque individu i engendre alors X_i enfants ; puis meurt. Ainsi, à l'étape suivante, la population est composée de $X_1 + \dots + X_k$ individus ;
- les tirages des X_i associés aux générations successives sont supposés indépendants les uns des autres.

On cherche ici à examiner la probabilité d'extinction de cette population après un certain nombre de générations.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus dans la population après n étapes.

On suppose que la population initiale est constituée d'un seul individu ; ainsi $Z_0 = 1$.

On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X .

4. Compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p , elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n .

Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
def simule_Z(n,p):  
    Z = ...  
    for i in range(n):  
        s = 0  
        for j in range(Z):  
            .....  
        Z = .....  
    return ...
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que la population soit éteinte après n générations ; ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

On note également R l'événement : « la population s'éteint après un certain nombre d'étapes ».

5. (a) Préciser les valeurs de u_0 et de u_1 .
(b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $(Z_n = 0)$ et $(Z_{n+1} = 0)$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. **On admet** que $\mathbb{P}(R) = \ell$.

6. (a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_2=0) = (u_1)^k$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0) = (u_n)^k$.

- (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1=k) (u_n)^k = \frac{p}{1-qu_n}$.
7. (a) Montrer que ℓ vérifie : $(\ell-1)(q\ell-p) = 0$.
- (b) On suppose $p \geq \frac{1}{2}$. Montrer : $\mathbb{P}(R) = 1$.
- (c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbb{P}(R) < 1$.
- (d) À quelle condition sur p la population finira presque sûrement par s'éteindre (c'est-à-dire que la probabilité d'extinction est égale à 1) ?

PARTIE C :

On suppose à présent que $p \geq \frac{1}{2}$.

On note T la variable aléatoire égale au premier instant où la population s'éteint (la partie B montre alors que T est bien définie avec probabilité 1)

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n$.

8. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}(T \leq n)$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = n) = v_{n-1} - v_n$.
9. Montrer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{n=1}^N n \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N$.
10. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$.

(b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

11. On suppose maintenant que $p > \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = \frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{q}{p} w_n$.

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$.

(c) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(T) \leq \frac{1}{1 - \frac{q}{p}}$.

Exercice 3 (Analyse)

Partie I - Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$$

On introduit également la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$$

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $u_0 > 0$, et renvoie la valeur de u_n .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite (v_n) est bien définie.

3. Trouver un réel $q \in]0, 1[$ tel que $\frac{\ln(k)}{2^k} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(q^k)$.

En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge.

Dans toute la suite, on note $\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

4. (a) Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k .

(b) Déterminer alors la nature de la série $\sum_{k \geq 1} (v_k - v_{k-1})$.

(c) En déduire la convergence de la suite (v_n) et exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ .

5. **On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^\sigma$.**

(a) En distinguant les cas $u_0 < e^\sigma$ et $u_0 > e^\sigma$, déterminer le signe de ℓ .

(b) En déduire, dans ces deux cas, la limite de la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ puis le comportement en $+\infty$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6. **On suppose dans cette question que $u_0 = e^\sigma$.**

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

(b) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) \geq \frac{\ln(n+1)}{2}$$

(c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie II - Approximation de σ

7. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x$.

(b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n}$$

8. Écrire alors une fonction Python `approx(eps)` prenant en argument un réel `eps` et renvoyant une approximation de σ à `eps` près.