Devoir surveillé n°2
Corrigé

Exercice 1 (Probabilités)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « Pile » soit égale à p, avec $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de « Pile » obtenus aux lancers de la pièce,
- Y indique le nombre de « Face » obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $\mathrm{X}+\mathrm{Y}=\mathrm{Z}$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. **Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.**

   Z compte le nombre de « succès » (obtenir 6) dans une succession de N épreuves de Bernoulli indépendantes (lancers de dé successifs).
   Le succès a pour probabilité $\dfrac{1}{6}$ (dé équilibré).
   On en déduit que $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\mathrm{N}, \dfrac{1}{6}\right)$.
   D'après le cours on a donc $\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \dfrac{\mathrm{N}}{6}$ et $\mathrm{V}(\mathrm{Z}) = \mathrm{N}\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{5\mathrm{N}}{36}$.

2. **Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}=n)}(\mathrm{X}=k)$. On distinguera les cas : $k \leqslant n$ et $k > n$.**

   - Si $k > n$, il est impossible d'obtenir k Pile en n lancers : $\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}=n)}(\mathrm{X}=k) = 0$.
   - Si $k \leqslant n$, on compte le nombre de succès (obtenir Pile) au cours des n lancers de pièce indépendants. Le succès a pour probabilité p ; on est dans un schéma de loi binomiale.
     Ainsi : $\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{(\mathrm{Z}=n)}(\mathrm{X}=k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

3. **Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :**

   - **si** $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$ **alors** $\mathbb{P}\big((\mathrm{X}=k) \cap (\mathrm{Z}=n)\big) = \dbinom{n}{k}\dbinom{\mathrm{N}}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{\mathrm{N}-n} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$
   - **si** $n > \mathrm{N}$ **ou** $k > n$ **alors** $\mathbb{P}\big((\mathrm{X}=k) \cap (\mathrm{Z}=n)\big) = 0$**.**

   On a toujours : $\forall\, (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big((\mathrm{X}=k) \cap (\mathrm{Z}=n)\big) = \mathbb{P}_{(\mathrm{Z}=n)}(\mathrm{X}=k) \times \mathbb{P}(\mathrm{Z}=n)$.

   - Si $k > n$, le résultat précédent montre que $\mathbb{P}\big((\mathrm{X}=k) \cap (\mathrm{Z}=n)\big) = 0$.
   - $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\mathrm{N}, \dfrac{1}{6}\right)$: si $n > \mathrm{N}$, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=n) = 0$ et donc $\mathbb{P}\big((\mathrm{X}=k) \cap (\mathrm{Z}=n)\big) = 0$.

- Considérons maintenant k et n tels que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$.
  On a alors : $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=n) = \binom{\mathrm{N}}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{N}-n}$; d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((\mathrm{X}=k)\cap(\mathrm{Z}=n)\big) = \mathbb{P}_{(\mathrm{Z}=n)}(\mathrm{X}=k)\times\mathbb{P}(\mathrm{Z}=n) &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{\mathrm{N}}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{N}-n}\\ &= \binom{n}{k}\binom{\mathrm{N}}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{N}-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{aligned}$$

4. **Calculer la probabilité** $\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)$**.**

erreur corrigée : mauvaise indexation du SCE.

On applique la formule des probabilités totales, avec le SCE $((\mathrm{Z}=n))_{n\in[\![0,\mathrm{N}]\!]}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\mathbb{P}\big((\mathrm{X}=0)\cap(\mathrm{Z}=n)\big)\\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\binom{\mathrm{N}}{n}(1-p)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{N}-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\binom{\mathrm{N}}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{N}-n}\left(\frac{1-p}{6}\right)^n\\ &= \left(\frac{5}{6}+\frac{1-p}{6}\right)^{\mathrm{N}} \qquad \text{(formule du binôme)}\\ \mathbb{P}(\mathrm{X}=0) &= \left(1-\frac{p}{6}\right)^{\mathrm{N}}\end{aligned}$$

5. **Montrer pour tout couple d'entiers naturels** (k,n) **tel que** $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$:

$$\binom{n}{k}\binom{\mathrm{N}}{n} = \binom{\mathrm{N}}{k}\binom{\mathrm{N}-k}{n-k}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$**.**

Soient (k,n) tels que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$; on écrit les coefficients binomiaux sous forme de factorielles :

$$\binom{n}{k}\binom{\mathrm{N}}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{\mathrm{N}!}{n!(\mathrm{N}-n)!} = \frac{\mathrm{N}!}{k!(n-k)!(\mathrm{N}-n)!}$$

$$\binom{\mathrm{N}}{k}\binom{\mathrm{N}-k}{n-k} = \frac{\mathrm{N}!}{k!(\mathrm{N}-k)!}\,\frac{(\mathrm{N}-k)!}{(n-k)!(\mathrm{N}-n)!} = \frac{\mathrm{N}!}{k!(n-k)!(\mathrm{N}-n)!}$$

et on a bien l'égalité recherchée.

On remarque déjà qu'en N lancers de dé, on ne pourra pas obtenir plus de N Pile à l'issue de l'expérience : $\mathrm{X}(\Omega) = [\![0,\mathrm{N}]\!]$.
$\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)$ étant déterminée : soit $k \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$. Toujours avec les probas totales :

erreur corrigée : la première somme allait

jusqu'à $+\infty$...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}\big((X=k)\cap(Z=n)\big)\\
&= \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} \qquad \text{(proba nulle si } n\notin [\![k,N]\!])\\
&= \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\\
&= \binom{N}{k} p^k \sum_{m=0}^{N-k}\binom{N-k}{m}(1-p)^m\left(\frac{5}{6}\right)^{N-m-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{m+k} \qquad \text{(avec } m=n-k\text{, et en sortant les facteurs indépendants de } n)\\
&= \binom{N}{k} p^k\left(\frac{1}{6}\right)^{k} \sum_{m=0}^{N-k}\binom{N-k}{m}(1-p)^m\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-m}\left(\frac{1}{6}\right)^{m}\\
&= \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}+\frac{1-p}{6}\right)^{N-k} \qquad \text{(binôme)}\\
\mathbb{P}(X=k) &= \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^{k}\left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}
\end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est encore valable pour $k=0$ (voir la question précédente).

6. **Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $\left(N,\frac{p}{6}\right)$.**
   Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

   La question précédente montre que $X(\Omega)=[\![0,N]\!]$, et : $\forall k\in[\![0,N]\!],\ P(X=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^{k}\left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}$: on a bien $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(N,\frac{p}{6}\right)$.

   En échangeant « Pile » et « Face » , et donc p en q, les mêmes calculs donneront $Y\hookrightarrow\mathscr{B}\left(N,\frac{q}{6}\right)$.

7. **Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?**
   Déterminer la loi du couple (X,Y).

   On se doute que X et Y ne sont pas indépendantes... comment le montrer ?

   On voit que $X+Y=Z\in[\![0,N]\!]$, alors que $X=N$ et $Y=N$ sont possibles.
   Donc $\mathbb{P}(X=N)\neq 0$, $\mathbb{P}(Y=N)\neq 0$, mais $\mathbb{P}\big((X=N)\cap(Y=N)\big)=0$ (N lancers de pièce sont effectuées au maximum, on ne peut pas avoir N Pile et N Face...).

   Ainsi $\mathbb{P}\big((X=N)\cap(Y=N)\big)\neq\mathbb{P}(X=N)\mathbb{P}(Y=N)$: X et Y ne sont pas indépendantes.

   On cherche maintenant à déterminer les probabilités $\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$ pour $(i,j)\in[\![0,N]\!]^2$. On a :

   $$\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Z=i+j)\big)=0 \ \text{ si } i+j>N$$

   et si $0\leqslant i+j\leqslant N$:

   $$\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Z=i+j)\big)=\binom{i+j}{i}\binom{N}{i+j}p^i(1-p)^j\left(\frac{5}{6}\right)^{N-i-j}\left(\frac{1}{6}\right)^{i+j}$$

8. **En comparant les variances de Z et de $X+Y$, montrer que $\operatorname{Cov}(X,Y)=-\frac{Npq}{36}$; puis que $\operatorname{Cov}(X,Z)=\frac{5Np}{36}$.**

On a $X+Y=Z$ donc $V(X+Y)=V(Z)=\frac{5N}{36}$ d'après la loi suivie par Z.
Or $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\text{Cov}(X,Y)$: on en déduit

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{5N}{36}-N\frac{p}{6}\left(1-\frac{p}{6}\right)-N\frac{q}{6}\left(1-\frac{q}{6}\right)\right)\\
&= \frac{N}{72}\left(5-p(6-p)-q(6-q)\right)\\
&= \frac{N}{72}\left(5-6p+p^2-6q+q^2\right)\\
&= \frac{N}{72}\left(5-6(p+q)+p^2+(1-p)^2\right)\\
&= \frac{N}{72}\left(5-6+p^2+p^2-2p+1\right)\\
&= \frac{N}{72}\left(2p^2-2p\right)\\
&= \frac{2Np}{72}(p-1)\\
\text{Cov}(X,Y) &= -\frac{Npq}{36}
\end{aligned}$$

(NB : il est raisonnable que cette covariance soit négative : grosso modo, plus on obtient de Pile, moins on obtient de Face).
Ensuite par bilinéarité :

$$\text{Cov}(X,Z)=\text{Cov}(X,X+Y)=\text{Cov}(X,X)+\text{Cov}(X,Y)=V(X)+\text{Cov}(X,Y)=N\frac{p}{6}\left(1-\frac{p}{6}\right)-\frac{Npq}{36}=\frac{Np}{36}(6-p-q)=\frac{5Np}{36}$$

9. *Simulation informatique.*

   (a) **Écrire les lignes permettant d'importer sous leurs alias usuels :**

   - **le package `numpy` de calcul numérique ;**
   - **le package `numpy.random` de modélisation de l'aléatoire ;**
   - **le package `matplotlib.pyplot` de tracés graphiques.**

   On supposera ces imports effectués dans tout le reste du sujet.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

   (b) **Programmer une fonction `XYZ(N,p)` qui modélise cette expérience et renvoie un triplet `(X,Y,Z)` correspondant aux valeurs de ces trois variables.**

   On simule deux variables binomiales successives :

```python
def XYZ(N,p):
    Z = rd.binomial(N,1/6)
    X = rd.binomial(Z,p)
    Y = Z-X
    return X,Y,Z
```

   (c) **Cette fonction étant supposée programmée, on écrit ensuite les commandes :**

```python
tirages=[XYZ(100,0.4) for k in range(100)]
X = [t[0] for t in tirages]
Z = [t[2] for t in tirages]
plt.scatter(Z,X)
plt.plot([0,max(Z)],[0,max(Z)]) # trace la droite d'équation y=x
plt.show()
```

   L'ordinateur renvoie un des graphiques suivants : lequel ? Justifier votre réponse.
   Ici on commence par effectuer 100 expériences, où chaque expérience consiste en $N=100$ lancers de dé ; et où la proba de Pile est $p=0.4$.

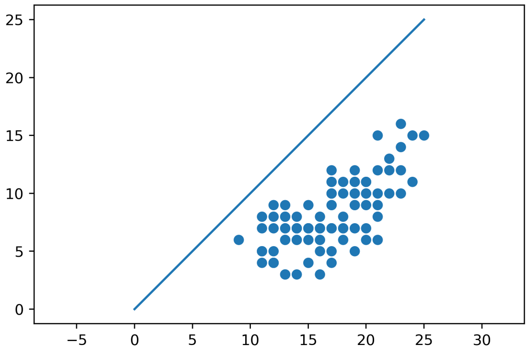

Figure 1

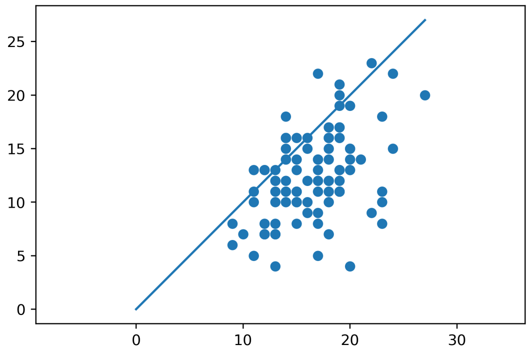

Figure 2

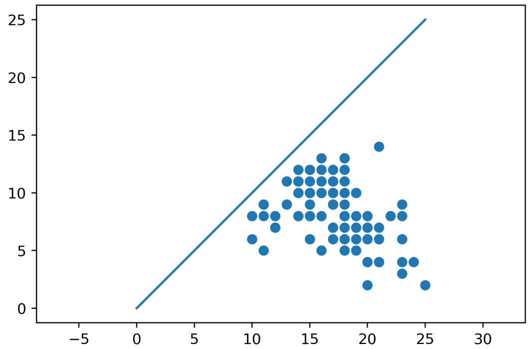

Figure 3

La liste L contient les 100 résultats ; une composante de `L` est de la forme `(x,y,z)`.
La liste `X` est donc la liste de toutes les premières composantes des éléments de L (donc les 100 valeurs de X obtenues sur les 100 expériences) ; la liste Z regroupe les troisièmes composantes, soit les 100 valeurs de Z.
Le graphique est donc le nuage de points des tirages du couple (Z, X) (en citant les abscisses en premier).
On a toujours $Z \geqslant X$ donc la figure 2 est incorrecte (points au-dessus de la première bissectrice) ; et comme $\operatorname{Cov}(X, Z) > 0$ on doit avoir « une tendance à la hausse » ce qui disqualifie la figure 3.
La bonne figure est la figure 1.

Exercice 2 (Probabilités)

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = q^k p = (1-p)^k p.$$

PARTIE A :

1. **Montrer que la variable aléatoire $Y = X+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.**

   Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

   $$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X+1=k) = \mathbb{P}(X=k-1) = q^{k-1}p.$$

   Ainsi, la variable aléatoire Y suit la loi géométrique de paramètre p.

2. **En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.**

   Y admet une espérance et une variance et on a :

   $$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} \quad ; \quad V(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

   $X = Y-1$ admet donc elle aussi une espérance et une variance. On a, par linéarité de l'espérance :

   $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$$

   et par invariance par translation de la variance :

   $$V(X) = V(Y) = \frac{q}{p^2}$$

3. **À l'aide de ce qui précède, programmer, *sans utiliser* `rd.geometric`, une fonction Python `simule_X(p)` qui, prenant en entrée le réel p, renvoie une simulation de la variable aléatoire X.**

```python
def simule_X(p):
    # on simule d'abord une géométrique
    Y = 1
    while rd.random()>p # échec ; on peut aussi mettre rd.random()<1-p
        Y = Y+1
    # et on renvoie X = Y-1
    return Y-1
```

PARTIE B :

On modélise l'évolution d'une population de la manière suivante. Si à un instant donné la population est composée de k individus, alors :

- **si k est égal à zéro, alors la population est éteinte ;**
- **si k est un entier supérieur ou égal à 1, on définit k variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A.**
  Chaque individu i engendre alors X_i enfants ; puis meurt. Ainsi, à l'étape suivante, la population est composée de $X_1 + \cdots + X_k$ individus ;
- **les tirages des X_i associés aux générations successives sont supposés indépendants les uns des autres.**

On cherche ici à examiner la probabilité d'extinction de cette population après un certain nombre de générations.
On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus dans la population après n étapes.
On suppose que la population initiale est constituée d'un seul individu ; ainsi $Z_0 = 1$.

On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

4. **Compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n.**
Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
def simule_Z(n,p):
    Z = 1 # pop initiale
    for i in range(n): # n étapes de temps
        s = 0 # on somme les enfants de tous les membres d'une génération
        for j in range(Z):
            s = s + simule_X
        Z = s
    return Z
```

NB : si Z = 0 à une certaine étape du programme, le second `for` ne tourne pas : `range(0)` est la liste vide. Ainsi la population restera bien nulle aux générations suivantes.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que la population soit éteinte après n générations ; ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

On note également R l'événement : « la population s'éteint après un certain nombre d'étapes » .

5. (a) **Préciser les valeurs de u_0 et de u_1.]**

$u_0 = \mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0$ car Z_0 est supposée constante égale à 1.
$u_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = p$ car Z_1 suit la même loi que X.

(b) **Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $(Z_n = 0)$ et $(Z_{n+1} = 0)$.**
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Si la population est éteinte au bout de n générations... elle le reste à la génération suivante !
Ainsi, $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$ ce qui donne, au niveau des événements :

$$(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$$

En prenant les probabilités on obtient $\mathbb{P}(Z_n = 0) \leqslant \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$ soit $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.
Étant majorée par 1 (ce sont des probabilités) elle est convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. **On admet** que $\mathbb{P}(R) = \ell$.

6. (a) **Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :** $\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = (u_1)^k$**.**

Sachant $(Z_1 = k)$ il y a k individus à la première génération ; la population sera éteinte à la seconde génération **si et seulement si** aucun de ces individus n'a d'enfants. Autrement dit

$$\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}(X_i = 0)\right)$$

Or les X_i sont indépendants par hypothèse ; ainsi :

$$\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = \prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X_i = 0) = p^k = (u_1)^k \quad \text{d'après 5a)}$$

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0)) = (u_n)^k$.

NB : c'est un peu pénible à formaliser mais l'idée est la suivante : sachant qu'il y a k enfants à la première génération, la population est éteinte à la $(n+1)$-ème génération ssi les k lignées de ces k enfants sont toutes éteintes au bout de n générations. On conclut par indépendance de ces lignées.

(b) **En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k)\,(u_n)^k = \dfrac{p}{1-qu_n}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{(Z_1 = k)\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{n+1}=0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1=k) \times \mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p \times (u_n)^k \qquad \text{avec } \mathbb{P}(Z_1=k) = \mathbb{P}(X=k) = q^k p\\ &= p\sum_{k=0}^{+\infty} \left(q\times u_n\right)^k\end{aligned}$$

Avec $0 \leqslant qu_n < 1$ (puisque $0<q<1$ et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$) on a :

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1}=0) = p\sum_{k=0}^{+\infty}\left(q\times u_n\right)^k = \frac{p}{1-qu_n}$$

7. (a) **Montrer que ℓ vérifie : $(\ell-1)\left(q\ell-p\right)=0$.**

Comme $0<q<1$ et $0\leqslant \ell \leqslant 1$, on a $q\ell<1$ et donc $1-q\ell \neq 0$. D'après 6b), par théorème du point fixe (la fonction $x \mapsto \dfrac{p}{1-qx}$ est continue sur $[0,1]$, car si $x \in [0,1],\ 1-qx\neq 0$) la limite ℓ de (u_n) vérifie :

$$\ell = \frac{p}{1-q\ell} \iff \ell - q\ell^2 = p \iff q\ell^2 - \ell + p = 0.$$

Par ailleurs l'expression donnée dans l'énoncé s'écrit :

$$(\ell-1)(q\ell-p) = q\ell^2 - p\ell - q\ell + p = q\ell^2 - \underbrace{(p+q)}_{=1}\ell + p = q\ell^2 - \ell + p.$$

Par conséquent, ℓ vérifie :

$$(\ell-1)(q\ell-p) = 0.$$

(b) **On suppose $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Montrer : $\mathbb{P}(R)=1$.**

$(\ell-1)(q\ell-p)=0$ donc on a $\ell=1$ ou $\ell=\dfrac{p}{q}$. Par l'absurde, si $\ell\neq 1$ alors $\ell<1$ ($\ell\in[0,1]$ car c'est une limite de suite à éléments dans $[0,1]$).
On a aussi $\ell=\dfrac{p}{q}$; mais si $p\geqslant \dfrac{1}{2}$ on a $p\geqslant q$ et donc $\dfrac{p}{q}\geqslant 1$.
C'est absurde ; on a donc bien $\ell=1$.

(c) **On suppose $p<\dfrac{1}{2}$. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left[0,\dfrac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbb{P}(R)<1$.**

La suite (u_n) est positive (pour tout n, u_n est une probabilité). Montrons par récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant \frac{p}{q}.$$

- $u_0=0$ d'après 5a) ;

- Supposons pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé que $u_n \in \left[0, \dfrac{p}{q}\right]$. Alors :

$$\begin{aligned} & u_n \leqslant \frac{p}{q} \\ \Rightarrow\quad & q u_n \leqslant p \\ \Rightarrow\quad & 1 - q u_n \geqslant 1 - p = q \\ \Rightarrow\quad & \frac{1}{1 - q u_n} \leqslant \frac{1}{q} \qquad \text{décroissance de l'inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Rightarrow\quad & u_{n+1} = \frac{p}{1 - q u_n} \leqslant \frac{p}{q} \qquad (p > 0) \end{aligned}$$

  D'où l'hérédité.

On a ainsi prouvé le résultat souhaité. Par passage à la limite (qui préserve les inégalités larges) :

$$\mathbb{P}(\mathrm{R}) = \ell \leqslant \frac{p}{q}.$$

Mais comme $p < \dfrac{1}{2}$ on a $p < q$; donc $\mathbb{P}(\mathrm{R}) < 1$.

(d) **À quelle condition sur p la population finira presque sûrement par s'éteindre (c'est-à-dire que la probabilité d'extinction est égale à 1) ?**

En relisant ce qui précède on voit que $\mathbb{P}(\mathrm{R}) = 1$ ssi $\underline{p \geqslant \dfrac{1}{2}}$.

PARTIE C :

On suppose à présent que $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.
On note T la variable aléatoire égale au premier instant où la population s'éteint (la partie B montre alors que T est bien définie avec probabilité 1) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n$.

8. **Justifier :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbb{P}(\mathrm{T} \leqslant n)$ **puis** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = v_{n-1} - v_n$.

   $u_n = \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = 0)$. $(\mathrm{Z}_n = 0)$ est l'événement « la population est éteinte au bout de n générations » , ce qui *équivaut* à dire qu'elle s'est éteinte à un nombre de générations inférieur ou égal à n ; donc à $(\mathrm{T} \leqslant n)$.
   Ainsi $u_n = \mathbb{P}(\mathrm{T} \leqslant n)$.

   Classiquement on a alors $\mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = \mathbb{P}(\mathrm{T} \leqslant n) - \mathbb{P}(\mathrm{T} \leqslant n-1) = u_n - u_{n-1} = (1 - v_n) - (1 - v_{n-1}) = v_{n-1} - v_n$.

9. **Montrer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\,\mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N} v_{\mathrm{N}}$.

   On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\,\mathbb{P}(\mathrm{T} = n) &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n(v_{n-1} - v_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n v_{n-1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n v_n \\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (n+1) v_n - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n v_n \qquad \text{(changement d'indice)} \\ &= v_0 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} (n+1) v_n - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} n v_n - \mathrm{N} v_{\mathrm{N}} \\ &= v_0 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} (n+1-n) v_n - \mathrm{N} v_{\mathrm{N}} \qquad \text{(on regroupe les sommes)} \\ &= v_0 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N} v_{\mathrm{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N} v_{\mathrm{N}} \qquad \text{(le terme } n=0 \text{ est incorporé dans la somme)} \end{aligned}$$

10. **On suppose dans cette question que** $p = \frac{1}{2}$**.**

   (a) **Montrer :** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$**.**

   Récurrence avec la relation de 6b) qui donne, pour $p = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \frac{1/2}{1-u_n/2} = \frac{1}{2-u_n}$.

   Dès lors :

   - $u_0 = 0$ (5a) donc $u_n = \frac{n}{n+1}$ est vraie pour $n = 0$;
   - si $u_n = \frac{n}{n+1}$ alors
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$
   ce qui donne l'hérédité et achève la récurrence.

   (b) **En déduire que la variable aléatoire** T **n'admet pas d'espérance.**

   On examine la convergence absolue de $\sum n\mathbb{P}(\mathrm{T}=n)$ (les termes à sommer sont positifs donc la convergence suffit).

   La question précédente nous parle des sommes partielles : examinons la limite $\mathrm{N} \to +\infty$ dans la propriété $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathbb{P}(\mathrm{T}=n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}}$.

   - $u_n = \frac{n}{n+1}$ donc $v_n = 1 - u_n = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$: par comparaison de SATP $\sum v_n$ diverge donc
   $$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n\right) = +\infty$$
   - $\mathrm{N}v_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1} \xrightarrow{\mathrm{N}\to+\infty} 1.$

   On déduit de cela que
   $$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathbb{P}(\mathrm{T}=n)\right) = +\infty$$
   ce qui donne la divergence de $\sum n\mathbb{P}(\mathrm{T}=n)$: T n'admet pas d'espérance.

11. **On suppose maintenant que** $p > \frac{1}{2}$**.**

   On pose, pour tout n **de** $\mathbb{N}$, $w_n = \frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$**.**

   (a) **Montrer :** $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \frac{q}{p} w_n$**.**

   C'est un peu calculatoire. On rappelle que $u_{n+1} = \frac{p}{1-qu_n}$; on a aussi $w_n = \frac{q-qu_n}{p-qu_n}$

   Alors
   $$w_{n+1} = \frac{q-qu_{n+1}}{p-qu_{n+1}} = \frac{q-\frac{pq}{1-qu_n}}{p-\frac{pq}{1-qu_n}} = \frac{q(1-qu_n)-pq}{p(1-qu_n)-pq} = \frac{q(1-p)-q^2u_n}{p(1-q)-pqu_n} = \frac{q^2(1-u_n)}{p^2-pqu_n}$$
   $$= \frac{q}{p}\frac{q(1-u_n)}{p-qu_n} = \frac{q}{p}w_n$$

   (b) **En déduire :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$, **puis :** $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^n$**.**

   (w_n) est géométrique de raison $\frac{q}{p}$; et $w_0 = \frac{1-u_0}{\frac{p}{q}-u_0} = \frac{q}{p}$. On en déduit
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

Ensuite on retourne la relation entre u_n et w_n : on obtient

$$u_n = \frac{1-\frac{p}{q}w_n}{1-w_n} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$$

Comme $p > \dfrac{1}{2}$ on a $p > q$ puis $0 < \dfrac{q}{p} < 1$ ce qui donne $0 < 1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1} \leqslant 1$.
On en déduit que

$$u_n = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \leqslant 1-\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

puis avec $v_n = 1-u_n$:

$$0 \leqslant v_n \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

(c) **Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(\mathrm{T}) \leqslant \dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$.**

On remonte aux sommes partielles calculées en question 9.

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\,\mathbb{P}(\mathrm{T}=n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n$$

Par la majoration qu'on vient d'obtenir et $0 < \dfrac{q}{p} < 1$ on a que $\sum v_n$ converge (comparaison à une géométrique) ; et que $\mathrm{N}v_{\mathrm{N}} \to 0$ par croissances comparées. T admet bien une espérance.
En passant à la limite $\mathrm{N} \to +\infty$:

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(\mathrm{T}=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^n \leqslant \frac{1}{1-\frac{q}{p}}$$

Exercice 3 (Analyse)

Partie I - Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$$

On introduit également la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$$

1. **Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $u_0 > 0$, et renvoie la valeur de u_n.**

   Attention, ce n'est pas de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ (mais plutôt $u_{n+1} = f(n, u_n)$).

   Bon au final ça ne change pas grand chose : il faut juste faire attention à la valeur de la variable sur laquelle on boucle.

```python
def suite(u0,n):
    u = u0
    for k in range(n):
        u = u**2/(k+1)
    return u
```

erreur corrigée : u^ 2 ne fonctionne pas

Bien compter : au premier tour de boucle `k` vaut 0, ce qui colle bien avec la relation $u_{0+1} = \dfrac{(u_0)^2}{0+1}$ qui permet le calcul de u_1.

2. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite (v_n) est bien définie.**

   C'est une récurrence dans difficulté : $u_0 > 0$ d'après l'énoncé ; et si $u_n > 0$ on a clairement $u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^2}{n+1} > 0$. Comme $u_n > 0$, $\ln(u_n)$ existe ; ce qui assure la bonne définition de (v_n).

3. **Trouver un réel $q \in]0,1[$ tel que $\dfrac{\ln(k)}{2^k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(q^k\right)$.**
   En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge.

   On n'a pas $\dfrac{\ln(k)}{2^k} = o((1/2)^k)$ mais toute autre suite géométrique à peine plus grande devrait faire l'affaire : prenons $q = \dfrac{3}{4}$.
   Alors
   $$\frac{\frac{\ln(k)}{2^k}}{\left(\frac{3}{4}\right)^k} = \frac{\ln(k)}{2^k}\frac{4^k}{3^k} = \ln(k)\left(\frac{2}{3}\right)^k \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$
   par croissances comparées.
   On a donc
   $$\frac{\ln(k)}{2^k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$
   $\sum\left(\frac{3}{4}\right)^k$ converge (série géométrique, $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$) donc par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{\ln(k)}{2^k}$ converge.

Dans toute la suite, on note $\sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{2^k}$.

4. (a) **Pour tout entier $k \geqslant 1$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.**

   Pour $k \geqslant 1$:
   $$\begin{aligned} v_k - v_{k-1} &= \ln(u_k) - \ln(u_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2^k}\ln\left(\frac{u_{k-1}^2}{k}\right) - \frac{1}{2^{k-1}}\ln(u_{k-1}) \\ &= \frac{2}{2^k}\ln(u_{k-1}) - \frac{\ln(k)}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\ln(u_{k-1}) \\ &= -\frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

   (b) **Déterminer alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}(v_k - v_{k-1})$.**

   C'est le résultat de 3) (si une série converge, son opposée converge aussi).

   (c) **En déduire la convergence de la suite (v_n) et exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.**

   Série téléscopique ! On écrit les sommes partielles de la série $\sum(v_k - v_{k-1})$. Soit $n \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0 \quad\Rightarrow\quad v_n = v_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{2^k}$$
   et cette dernière somme convergeant, on a la convergence de la SUITE (v_n) et :
   $$\ell = \lim_{n\to+\infty} v_n = v_0 - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{2^k} = \ln(u_0) - \sigma$$

5. **On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{\sigma}$.**

   (a) **En distinguant les cas $u_0 < e^{\sigma}$ et $u_0 > e^{\sigma}$, déterminer le signe de ℓ.**

   Si $u_0 < e^{\sigma}$ on a $\ell = \ln(u_0) - \sigma < 0$ par croissance stricte du ln.
   Si $u_0 > e^{\sigma}$ on a de même $\ell > 0$.

   (b) **En déduire, dans ces deux cas, la limite de la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ puis le comportement en $+\infty$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

   Par définition de v_n, on a $\ln(u_n) = 2^n v_n$. Dans les deux cas qui suivent, $\ell \neq 0$ ce qui justifie le passage aux équivalents.

   - Si $u_0 < e^{\sigma}$ alors
   $$\ln(u_n) = 2^n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \ell \to -\infty$$
   ce qui donne ensuite
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\underbrace{\ln(u_n)}_{\to-\infty}\right) = 0$$
   - Si $u_0 > e^{\sigma}$ alors
   $$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \ell \to +\infty$$
   ce qui donne cette fois
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\underbrace{\ln(u_n)}_{\to+\infty}\right) = +\infty$$

6. **On suppose dans cette question que $u_0 = e^{\sigma}$.**

   (a) **Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,**
   $$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

   Si $u_0 = e^{\sigma}$ alors en reprenant le téléscopage

   $$\begin{aligned} v_n = v_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} &= \ln(u_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= \sigma - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

   (b) **Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,**
   $$\ln(u_n) \geqslant \frac{\ln(n+1)}{2}$$

   $\ln(u_n) = 2^n v_n = 2^n \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.
   On cherche alors à minorer l'expression précédente. Les termes à sommer étant positifs, il suffit de minorer par le premier terme de la somme :
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geqslant \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}$$
   et il sut que
   $$\ln(u_n) = 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geqslant \frac{\ln(n+1)}{2}$$

(c) **Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.**

$\dfrac{\ln(n+1)}{2} \to +\infty$ donc par minoration $\ln(u_n) \to +\infty$, puis $u_n = \exp(\ln(u_n)) \to +\infty$.

Partie II - Approximation de σ

7. (a) **Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x$.**

On étudie $g : x \mapsto \ln(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$; ou on utilise la concavité du ln qui donne (avec la tangente en 1) : $\ln(x) \leqslant x - 1 \leqslant x$.

(b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+2}{2^n}$$

La majoration précédente donne :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{k}{2^k}$$

On a deux termes de séries convergentes (celle de droite est un géométrique dérivée de raison $1/2 \in]-1,1[$; donc on peut sommer de $k = n+1$ à $+\infty$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$$

Ensuite il faut s'énerver un peu :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i+n}{2^{i+n}} \qquad \text{changement } i = k-n \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i+n}{2^i} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{2^i} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n}{2^i} \right) \\
&\text{(les deux sommes convergent séparément !)} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + n \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \right) \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + n \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2^n}(2+n)
\end{aligned}$$

et on trouve bien

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+2}{2^n}$$

8. **Écrire alors une fonction Python `approx(eps)` prenant en argument un réel `eps` et renvoyant une approximation de σ à `eps` près.**

On approxime σ (somme de la série de tg $\dfrac{\ln(k)}{2^k}$) par les sommes partielles de cette même série ; la précision de l'approximation est donnée par le reste partiel :

$$|\sigma - S_n| = R_n$$

où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.
Avec la majoration qui précède :

$$|\sigma - S_n| = R_n \leqslant \frac{n+2}{2^n}$$

de sorte que

$$\textit{pour que } |\sigma - S_n| \leqslant \varepsilon, \textbf{\textit{il suffit}} \textit{ que } \frac{n+2}{2^n} \leqslant \varepsilon.$$

D'où deux choses :

- ε étant donné, trouver un tel n (en testant brutalement tous les entiers successivement) ;
- calculer la somme partielle d'indice n.

```python
def approx(eps):
    # recherche de l'entier n
    n = 1
    while (n+2)/(2**n)>eps:
        n = n+1
    # ici n a donc une valeur qui convient
    # calcul de la somme partielle
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S = S + np.log(k)/(2**k)
    return S
```