ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2025-2026
Mathématiques

Programme de colle n°5
Semaine du 5/11

Révisions d'algèbre linéaire ECG1
Probabilités discrètes

Pour cette semaine, l'exercice étoilé est remplacé par un exercice d'algèbre linéaire sous une des formes suivantes. Des exemples avec leur correction sont donnés en annexe.

Dans ce qui suit, les valeurs de n et m seront données (et pas trop grandes).

- Soit $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^n$ défini par des équations linéaires données ; montrer que E est un espace vectoriel, et en donner une base.
- Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ donnée. Donner des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ (en tirant parti du théorème du rang).
- Montrer qu'une famille donnée est une base de $\mathbb{R}^n$. Donner les coordonnées d'un certain vecteur dans cette base.

Probabilités / variables aléatoires discrètes
Même programme que la semaine précédente.

Python : simulation d'expériences aléatoires
On importe

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

On dispose alors des commandes `rd.random()`, `rd.binomial()`, `rd.randint()`, `rd.geometric()`, `rd.poisson()`.

- Savoir programmer uniquement à l'aide de `rd.random()` une fonction générant des tirages d'une loi binômiale ; d'une loi géométrique.
- Modélisation d'expériences aléatoires simples à l'aide des commandes au programme (on pourra notamment modéliser l'expérience aléatoire présentée par l'exercice traité).
- Notamment : pour `p`$\in [0,1]$, l'expression « `rd.random()<p` » est vraie avec une probabilité `p`.

Annexe : exercices type d'algèbre linéaire

1. **Soit** $\mathrm{F} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ y-2t=0 \end{cases} \right\}$**.**
   Montrer que E est un espace vectoriel, et en donner une base.

   Réponse : On a :

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ y-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2t-z-t=0 \\ y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-t \\ y=2t \end{cases}$$

   donc $\mathrm{F} = \left\{(z-t,2t,z,t) \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{z(1,0,1,0)+t(-1,2,0,1) \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,0),(-1,2,0,1)\big)$.
   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, donc un espace vectoriel.
   On a aussi obtenu que la famille $\left\{(1,0,1,0),(-1,2,0,1)\right\}$ est génératrice de F. Or cette famille est constituée de deux vecteurs non colinéaires ; c'est donc une famille libre , et donc c'est une base de F. On a aussi $\dim(\mathrm{F}) = 2$ (le cardinal de la base obtenue).

2. **Soit** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x-3y-7z, -x+2y+4z, 2x-y+z)$**.**
   Déterminer des bases de $\mathrm{Im}(f)$ **et** $\mathrm{Ker}(f)$**.**

   Réponse : On résout $f(u) = (0,0,0)$.
   Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y-7z=0 \\ -x+2y+4z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{...pivot...} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=-3z \end{cases}$$

   d'où $\mathrm{Ker}(f) = \{(-2z,-3z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((-2,-3,1)\big)$.
   Le vecteur $(-2,-3,1)$ est non nul donc forme une famille libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
   Par le théorème du rang on a : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$; on en déduit $\mathrm{rg}(f) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

   On sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))\big) = \mathrm{Vect}\big((1,-1,2),(-3,2,-1),(-7,4,1)\big)$. $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2 donc toute famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ en constitue une base. Ainsi on a par exemple :
   $\big((1,-1,2),(-3,2,-1)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ (deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ non colinéaires).

3. **Montrer que la famille** $\left\{(-1,3,1),(0,0,1),(1,-2,1)\right\}$ **est une base de** $\mathbb{R}^3$**. Donner les coordonnées dans cette base du vecteur** (a,b,c)**.**
   Réponse : Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels.
   On a

$$\lambda_1(-1,3,1) + \lambda_2(0,0,1) + \lambda_3(1,-2,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

ce qui montre que la famille donnée est libre. On a alors une famille libre à 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, avec $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Les coordonnées de (a, b, c) dans cette base sont les uniques x, y, z tels que

$$(a, b, c) = x(-1, 3, 1) + y(0, 0, 1) + z(1, -2, 1)$$

Traduit sous forme de système on obtient

$$\begin{cases} -x + z = a \\ 3x - 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

ce qui donne après résolution $x = b + 2a$, $y = c - 2b - 5a$, $z = b + 3a$.
Les coordonnées de (a, b, c) sont traditionnellement présentées dans un vecteur colonne : ici $\begin{pmatrix} b + 2a \\ c - 2b - 5a \\ b + 3a \end{pmatrix}$.