

TD4

Espaces vectoriels

1 Généralités

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? (on démontrera ce qu'on affirme)

1. (*) $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
2. (*) $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
3. (*) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$
4. (*) $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y - z = 1\}$
5. (*) $F_5 = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid x + t = 0 \right\}$
6. (*) $F_6 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MX = 2X\}$ (où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est fixé non nul).
7. (*) $F_{6bis} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$ (où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est fixé non nul).
8. (*) $F_7 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = 0\}$
9. (*) F_8 : l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversibles.
10. F_9 : L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tels que $P(0) = P(1)$.
11. F_{10} : L'ensemble des polynômes de degré 3.

(*) Pour les ensembles parmi les neuf premiers (sauf F_6 et F_{6bis}) qui sont des sev, en donner une base.

Exercice 2. Déterminer si les familles suivantes sont libres ; si elles ne le sont pas, en extraire une famille libre engendrant le même espace vectoriel.

1. $\{(1, 0, 1), (0, 2, 2), (3, 7, 1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. $\{X - 1, X + 1, X^2 - 1\}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$
5. $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ dans $\mathbb{R}_2[x]$, où pour tout réel x : $P_1(x) = x - 1$, $P_2(x) = x + 1$, $P_3(x) = x^2 - 1$, $P_4(x) = 2x + 3$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel, et $(u_1, u_2) \in E^2$. Montrer que si (u_1, u_2) est libre, alors $(u_1 + u_2, u_1 - u_2)$ est libre.

Exercice 4. (*) Écrire les ensembles suivants comme des espaces engendrés ; en donner à chaque fois une base.

1. $F_1 = \{(3y - z, z + y, 4y) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

2. $F_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + 3t = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \right\}$
3. $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$ (on pourra écrire un polynôme P sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ et déterminer des conditions sur a, b, c, d pour que P appartienne à F_3).
4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x+2z & x-y \\ 7y-z & 3x-z \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
5. L'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^t M = -M$ (appelées matrices *antisymétriques*; cet ensemble est noté $A_3(\mathbb{R})$).

2 Avec les dimensions

Exercice 5. On reprend l'espace $F_7 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ défini dans le premier exercice.

On note $P_1 = X - 1$, $P_2 = X^2 - X$, $P_3 = X^3 - X^2$.

Donner la dimension de F_7 , et montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de F_7 .

Exercice 6. Donner le rang des familles de l'exercice 2.

Exercice 7. Soient les deux sev de $\mathbb{R}^3$ donnés par $F_1 = \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, 2))$, et $F_2 = \text{Vect}((8, 7, 1), (6, -1, 7))$.

1. Montrer que $(8, 7, 1) \in F_1$ et $(6, -1, 7) \in F_1$.
2. Déterminer $\dim(F_1)$ et $\dim(F_2)$.
3. En déduire $F_1 = F_2$.

Exercice 8. (*)

1. Montrer que la famille $\{(1, 3, -2), (-1, -2, 5), (0, 1, 2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées dans cette base du vecteur (a, b, c) .
2. Soient $P_1 = 1$ et $P_2 = X - 1$.
Montrer que la famille $(P_1, P_2, (P_2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées dans cette base de $Q = X^2 + X + 1$.
3. Montrer que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner les coordonnées dans cette base de la matrice I_2 .

Exercice 9.

Donner le rang des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10.

1. Déterminer les réels x et y tels que $v = (x, 1, -1, y)$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 1, 2, 1)$ et $v_2 = (2, 1, 5, 3)$.
2. À quelle condition sur (x, y, z) le vecteur $v = (x, y, z)$ appartient-il au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (3, -1, 3)$ et $v_2 = (-1, 2, 4)$?

Exercice 11. Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; on note E l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $MK = KM = M$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que toute matrice de E est non inversible.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, \dots, h, i$ pour que $M \in E$.
En déduire une base de E , et $\dim(E)$.

3 Plus difficile

Exercice 12. On rappelle le résultat essentiel suivant sur les polynômes : soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Si P admet (au moins) $n + 1$ racines deux à deux distinctes, alors c'est le polynôme nul.

1. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que : $P(0) = Q(0)$; $P(1) = Q(1)$; $P(2) = Q(2)$. Montrer que $P = Q$.
Soient les polynômes suivants : $L_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $L_1 = -X(X-2)$, $L_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$.
2. Calculer les $L_i(j)$ pour $(i, j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2$.
3. En utilisant la question 1, montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$. Qu'a-t-on montré sur la famille (L_0, L_1, L_2) ?
4. Montrer que (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme X dans cette base.
5. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ quelconques. Déterminer un polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ (qu'on exprimera en fonction des L_i) tel que $R(0) = a$, $R(1) = b$, $R(2) = c$. Montrer que ce polynôme est unique.

Indications

- 1
 1. oui
 2. non : regarder l'opposé d'un vecteur
 3. oui
 4. non : système linéaire non homogène
 5. oui
 6. oui
 7. oui
 8. non : penser à la matrice nulle
 9. oui
 10. non : par exemple trouver deux polynômes de degré 3 dont la somme ne l'est pas
- 2
 1. libre
 2. liée ; il y a une famille générée à deux vecteurs
 3. liée (on le sait sans calcul ! pourquoi ?) ; il y a une famille générée à deux vecteurs
 4. libre
 5. liée ; il y a une famille générée à trois vecteurs
- 3 Soit une combinaison linéaire nulle de $u_1 + u_2$ et $u_1 - u_2$; la transformer en une combi lin nulle de u_1 et u_2 et utiliser la liberté de cette famille.
- 4 RAS. Réponses possibles (on donne à chaque fois une base) :
 1. $F_1 = \text{Vect}((3, 1, 4), (-1, 1, 0))$
 2. $F_2 = \text{Vect}((1, 0, 1, -\frac{2}{3}), (0, 1, 0, 0))$.
 3. $F_3 = \text{Vect}(X^3 - X, X^2 - X)$
 4. $F_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right)$.
 5. $F_5 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
- 5 $\dim(F)$ se déduit de la base trouvée précédemment ; et servira à montrer que la famille proposée est aussi une base.
- 6 Se souvenir de la définition du rang d'une famille de vecteurs. Il suffit alors de compter.
- 7
 1. Chercher à écrire ces vecteurs comme des combinaisons linéaires des vecteurs engendrant F_1 .
 2. Trouver des bases de F_1 et F_2 (ne pas aller chercher trop loin !)
 3. Il suffit d'une inclusion. Pourquoi ? Et laquelle ?
- 8 Appliquer les diverses définitions du cours. On trouve les colonnes de coordonnées suivantes :
 1. $\begin{pmatrix} 9a - 2b + c \\ 8a - 2b + c \\ -11a + 3b - c \end{pmatrix}$
 2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 3. $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- 9 Se ramener à la définition : dimension du sev engendré par les lignes ; ou de celui engendré par les colonnes (parfois l'un est plus facile que l'autre).
 1. $\text{rg}(M_1) = 2$
 2. $\text{rg}(M_2) = 1$
 3. $\text{rg}(M_3) = 3$
 4. $\text{rg}(M_4) = 3$
 5. $\text{rg}(M_5) = 1$
- 10
 1. On cherche donc s'il existe deux coefficients α et β tels que $(x, 1, -1, y) = \alpha(1, 1, 2, 1) + \beta(2, 1, 5, 3)$.
On trouvera que ces coeff existent ssi $x = 0$ et $y = -1$.
NB : les valeurs de α et β ne sont pas demandées, seulement leur existence !

2. C'est le même principe ; trouver $2x + 3y - z = 0$.
- 11**
1. Ici il n'est pas du tout habile de chercher une famille génératrice. Revenir à non vide / stable par c-lin.
 2. Par l'absurde : si $KM = M$ avec M inversible, que dire de K ?
 3. Cette fois il faut mettre les mains dans le cambouis !
- 12**
1. Compter les racines de $P - Q$
 - 2.
 3. Utiliser la question 1 avec $P = P$, et $Q = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$.
 4. Pour les coordonnées il n'y a presque aucun calcul : regarder la question précédente.
 5. Chercher R comme combinaison linéaire des L_i ; les coefficients seront solution d'un système simple !
L'unicité découle d'une question précédente (s'il y en a deux qui prennent les mêmes valeurs en $0, 1, 2, \dots$)