ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2025-2026
Mathématiques

Programme de colle n°6
Semaine du 10/11
Algèbre linéaire

Pour cette semaine, les exercices étoilés du TD4 sont exigibles.

Généralités

- Définition (les axiomes ont été donnés mais ne sont pas exigibles, on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel en montrant que c'est un sev d'un des espaces de référence).
- Les espaces de référence sont : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[x]$. Seuls les espaces de dimension finie sont au programme.
- Espace $\mathbb{R}_n[x]$ (ou $\mathbb{R}_n[X]$) :
  - On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes. La notation avec les X^k est privilégiée.
  - Résultats utiles : deux polynômes sont égaux ssi ils ont les mêmes coefficients ; a est racine de P ssi P peut se factoriser par $(X-a)$; si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ a $n+1$ racines distinctes, c'est le polynôme nul.
- Combinaison linéaire, sous-espace vectoriel.
- Espace engendré par une famille finie de vecteurs.
- Famille génératrice, famille libre, base. Coordonnées. Bases canoniques des espaces de référence.
- Caractérisation des familles libres dans le cas de familles à 1 vecteur ; à 2 vecteurs.

Théorie de la dimension

- On appelle dimension de E, le cardinal commun de toutes les bases.
- Toute famille libre de E a un cardinal $\leqslant \dim(E)$; toute famille génératrice de E a un cardinal $\geqslant \dim(E)$. Contraposées de ces propositions.
- Toute famille de cardinal dim(E) est une base ssi elle est libre ; ssi elle est génératrice.
- Dimension d'un sev. Si E et F sont deux espaces vectoriels, $E = F \Leftrightarrow \left(F \subset E \text{ et } \dim(E) = \dim(F)\right)$.
- Rang d'une famille de vecteurs : définition ; cas où la famille est libre.
  Rang d'une matrice. $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\left({}^tM\right)$ (résultat admis). Conséquence : le rang de M est aussi le rang de la famille de ses lignes.