

TD5

Applications linéaires

Les bases

Exercice 1. (*)

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f(M)$ pour tout

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f(P)$, où $P = a + bX + cX^2$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression de $f((x, y))$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_3[X])$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression de $f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (*)

Les applications suivantes sont-elle linéaires?

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, 3y, y - 2x) \end{array} \quad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x^2) \end{array} \quad f_3: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a + d, c - b) \end{array}$$

$$f_4: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP(X) - P'(X) \end{array} \quad f_5: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AMB \end{array} \quad (A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ fixées})$$

$$f_6: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^t(M + I_n) \end{array}$$

Exercice 3. (*) Dans cet exercice on admet la linéarité des applications introduites (rien de bien compliqué mais c'est long et redondant avec l'exo précédent). Donner, pour chacune d'entre elles :

- La matrice dans les bases canoniques ;
- Le noyau (et une base de celui-ci s'il n'est pas réduit à 0), l'image (et une base de celle-ci en cas de non-surjectivité) et les dimensions de ces deux espaces ;
- Le caractère injectif / surjectif / bijectif.

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (5x + y - 3z, -x + y + z, 5x + 2y - 3z) \end{array}$$

On donnera la matrice de f_1 dans $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)$ puis dans la base $\mathcal{B} = \{(2, 0, 3), (1, 0, 1), (-1, 1, -2)\}$.

$$f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-x + 2y - 4z, x - 4y + 6z, 2x + 4z, x + 5y - 3z) \end{array}$$

$$f_3: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-2b+c & b-c \\ c-b & -2a+4b-2c \end{pmatrix} \end{array} \quad f_4: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + {}^t M \end{array}$$

On donnera la matrice de f_4 dans $\mathcal{B}_c(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ puis dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$f_5: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-2y+3z & -2x+4y+4t & z-t \\ z+2t & x-y & x+2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f_6: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & 2P - (X-1)P' \end{array} \quad f_7: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(-1)) \end{array}$$

$$f_8: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(indic pour aller plus vite sur f_8 : on pourra étudier l'inversibilité de A)

Exercice 4. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (2x - y, x + 3y)$$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Déterminer f^{-1} .
2. Donner $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_c)$. Reprendre les questions précédentes en étudiant A.

Études « concrètes » d'applications linéaires

Exercice 5. Soit $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x + y, x + y) \end{array}$

1. Montrer que φ est linéaire ; montrer que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi^n = \varphi$.

3. Soit $s = 2\varphi - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Donner la valeur de $s(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $s^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de s^n (on discutera suivant la parité de n).

Exercice 6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, f(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad f(e_4) = e_1$$

1. Que vaut l'endomorphisme f^4 ? En déduire que f est un automorphisme, et donner f^{-1} .
2. Déterminer $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$.
3. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, calculer $f^i(e_j)$. En déduire, sans calcul matriciel, les matrices M^2, M^3, M^4 .

Exercice 7. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Calculer $\text{Ker}(f)$. f est-elle injective? surjective?

On note $u = (2, 1, -2)$.

2. Déterminer $v \in \mathbb{R}^3$ de la forme $(a, 1, b)$ tel que $f(v) = u$.
3. Déterminer $w \in \mathbb{R}^3$ de la forme $(c, 1, d)$ tel que $f(w) = v$.
4. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice B de f dans cette base (sans utiliser la matrice de passage!).
5. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u, v)$.
6. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}}$ entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$. Donner une relation entre A, B , et P ; la vérifier par le calcul.
7. Montrer que $f^3 = \tilde{0}$.

Exercice 8. On considère les éléments suivants de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $u = (1, -\sqrt{2}, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (1, \sqrt{2}, 1)$. On admet que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{B}$.

1. Justifier que la matrice P est inversible.
2. Sans calculer P^{-1} , montrer que la matrice $P^{-1}JP$ est une matrice diagonale D que l'on explicitera.
3. Calculer J^2 , et exprimer J^2 en fonction de I et de K . En déduire que $P^{-1}KP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'élément suivant de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que M s'exprime simplement à l'aide de I, J, K et a, b, c .
- (b) En déduire que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$; on admet que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u , v et w .
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
4. Montrer que $f^2 = 3f - 2\text{Id}$. Retrouver les résultats de la question précédente à l'aide de cette égalité.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\text{Id}$.

Exercice 10 (EDHEC 2017). On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E , les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e_0(t) = 1 ; e_1(t) = t ; e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E , associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
(b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x , puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2 .
(c) Dédire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E .
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) . On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \right)$$

- (b) Justifier que φ est un automorphisme de E .

Exercice 11. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A .

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$; en déduire $\text{rg}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
2. Calculer f^4 .
3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(e_1)$, $\varepsilon_3 = f(e_2)$, $\varepsilon_4 = f(e_3)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.
(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.
4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Plus théorique

Exercice 12. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, non nulle, telle que $f^2 = \tilde{0}$.

1. Sans calcul : f est-il un automorphisme ?
2. Montrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
3. En déduire les dimensions de ces deux sous-espaces vectoriels.
4. Soit $u \in \mathbb{R}^3$, tels que $u \notin \text{Ker } f$.
 - (a) Montrer que $(u, f(u))$ est libre.
 - (b) Montrer que $f(u) \in \text{Ker}(f)$.
 - (c) Montrer qu'il existe $v \in \text{Ker}(f)$, non colinéaire à $f(u)$.
 - (d) Montrer que $(u, f(u), v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (e) Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 13. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $g \circ f = \tilde{0} \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

Exercice 14. Soit f un endomorphisme. Démontrer :

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Exercice 15 (Noyaux itérés). Soit E un espace vectoriel de dimension n , et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $N_p = \text{Ker}(f^p)$ et $I_p = \text{Im}(f^p)$.

1. Préciser les sev N_0 et I_0 .
2. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$, et $I_{p+1} \subset I_p$.
3. En raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $N_m = N_{m+1}$.
4. Montrer alors que : $\forall n \geq m$, $N_n = N_m$.
5. Montrer que : $\forall n \geq m$, $I_n = I_m$.

Indications

1

2

3 Réponses (on donne à chaque fois des bases des Ker/Im)

- $\text{Mat}(f_1, \mathcal{B}_C) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\text{Ker}(f_1) = \{(0, 0, 0)\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$; $\text{Mat}(f_1, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; bijective.

- $\text{Mat}(f_2, \mathcal{B}_C(\mathbb{R}^3), \mathcal{B}_C(\mathbb{R}^4)) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$; $\text{Ker}(f_2) = \text{Vect}((-2, 1, 1))$; $\text{Im}(f_2) = \text{Vect}((-1, 1, 2, 1), (2, -4, 0, 5))$; non inj / non surj

- $\text{Mat}(f_3, \mathcal{B}_C) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\text{Ker}(f_4) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$; $\text{Im}(f_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right)$; non inj / non surj

- $\text{Mat}(f_4, \mathcal{B}_C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\text{Mat}(f_4, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\text{Ker}(f_4) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (peut se lire immédiatement dans la

seconde matrice !!); $\text{Im}(f_4) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (ensemble des matrices symétriques). Non inj / non surj.

- $\text{Mat}(f_5, \mathcal{B}_C) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\text{Ker}(f_5) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ et f_5 est injective; une base de $\text{Im}(f_5)$ est engendrée par les images des

4 vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. f_4 non surj.

- $\text{Mat}(f_6, \mathcal{B}_C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$; $\text{Ker}(f_6) = \text{Vect}(1 - 2X + X^2)$; f_6 n'est pas injective; $\text{Im}(f_6) = \text{Vect}(2, 1 + X, 2X) = \mathbb{R}_1[X]$. f_6 n'est pas surjective.

- $\text{Mat}(f_7, \mathcal{B}_C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\text{Ker}(f_7) = \text{Vect}(X - X^3)$; f_7 n'est pas injective; $\text{Im}(f_7) = \mathbb{R}^3$; f_7 est surjective.

•

$$\text{Mat}(f_8, \mathcal{B}_C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A est de déterminant non nul donc est inversible donc $AM = 0_2 \Leftrightarrow M = 0_2$ $\text{Ker}(f_8) = \{0_2\}$ et f_8 est injective; comme c'est un endomorphisme elle est aussi surjective et bijective.

4 1. Montrer la linéarité! Ensuite il y a plusieurs méthodes; on peut revenir à la définition d'une bijection réciproque.
2. À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur A f est-il un autom. ? Et dans ce cas-là, quelle est la matrice de f^{-1} dans $\mathcal{B}_C$?

5 1. $\varphi \circ \varphi = \varphi$: procéder en calculant $\varphi(\varphi((x, y)))$; ou utiliser une matrice.

2.

3.

4. Regarder $s^3, s^4, \dots$ pour se faire une idée.

6 1. calculer les images des vecteurs de la base canonique. Puis reconnaître une propriété $f \circ (\dots) = \text{Id}$.

2.

3.

7 1.

2. Pas de subtilité, se ramener à un syst. linéaire.

3. idem

4. Revenir à la méthode de construction de $\text{Mat}(f, \mathcal{B})$. Zéro calcul !!

5. Zéro calcul non plus si on se met dans la bonne base.

6.

7. Encore une fois le choix de la base fait la différence.

8 1.

2. Interpréter $P^{-1}JP$ comme la matrice d'un certain endomorphisme dans une certaine base.
3. Il faut à un moment montrer que $(P^{-1}JP)^2 = P^{-1}J^2P$.
- 4.

9 1.

- 2.
3. La propriété d'automorphisme peut se lire sur la matrice de f dans la base... de votre choix.
4. Raisonner sur des matrices.
5. Et ici encore.

10 Il faut bien se souvenir ici que les polynômes sont des fonctions polynômiales. Par exemple, $e_1 : t \mapsto t$ est ce qu'on appelle ailleurs le polynôme X .

1. (a)
(b) Par exemple, e_2 est la fonction $t \mapsto t^2$, alors $e_2(x+t) = (x+t)^2$.
(c) Il ne reste plus qu'à montrer « endo » ...
2. (a) Réponse : $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(b) Regarder une propriété de A .

11 1.

2. On peut calculer l'image par f^4 de chaque vecteur de base ; ou utiliser la matrice A .
3. (a)
(b) Appliquer la méthode de construction colonne par colonne. Il y a peu de calculs !
4. Si une telle chose existe, que dire des matrices A et A^2 ? Montrer que c'est impossible.

12 1. S'il l'était, que dire de f^2 ?

2. Démonstration usuelle. Il faut juste se souvenir des définitions de $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.
3. On est en dimension 3 : il n'y a qu'une possibilité.
4. (a) Soient λ_1, λ_2 réels tq $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) = 0$. Montrer que $\lambda_1 f(u) = 0$.
(b)
(c) Que vaut $\dim(\text{Ker}(f))$?
(d) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) = 0 + \lambda_3 v = 0$. Appliquer f à cet égalité pour montrer $\lambda_1 = 0$.
(e)

13 Double inclusion ; il faut juste traduire les hypothèses et savoir ce qu'on veut démontrer !

14 $\Rightarrow$: en prenant $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ on introduit assez rapidement un vecteur de $\text{Ker}(f^2)$...

$\Leftarrow$: pour $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$: si $x \in \text{Ker}(f^2)$, que dire de $f(x)$?

15 1.

- 2.
3. Si F_1 et F_2 sont tels que $F_1 \subset F_2$, et $F_1 \neq F_2$, que dire de leurs dimensions ? La suite des noyaux peut-elle alors « croître strictement » indéfiniment ?
4. Récurrence ; si $x \in N_{n+1}$, à quoi appartient $f(x)$?
5. Commencer par montrer une inclusion ; puis....